Cinématique

TD-M1

Tester le cours

Qu'est ce qu'un solide ?	C'est un objet pour lequel les distances entre deux points sont invariantes au cours du temps.
Qu'est ce qu'un point matériel ?	C'est un système dont le mouvement est entièrement décrit par celui de son centre d'inertie. On néglige alors les mouvements de rotation sur lui-même.
Quelle est l'expression de la vitesse en fonction du vecteur position ? En donner une interprétation géométrique.	$\vec{v}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$ C'est la tangente à la trajectoire en tout point.
Quelles sont les dérivées de $\vec{e_r}$ et de $\vec{e_\theta}$ par rapport au temps ?	$\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$ et $\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r}$
Expressions en coordonnées cartésiennes : ◇ du vecteur position et de sa norme, ◇ du vecteur déplacement élémentaire, ◇ des longueur, surface et volumes élémentaires, ◇ du vecteur vitesse et de sa norme, ◇ du vecteur accélération et de se norme.	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ et $\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ◇ $d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$ ◇ $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$ (ou $\mathrm{d}y$ ou $\mathrm{d}z$) ; $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ (ou $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$ ou $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$) ; $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ◇ $\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$ et $\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ ◇ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z}$ et $\lVert\vec{a}\rVert = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$
Expressions en coordonnées polaires : ◇ du vecteur position et de sa norme, ◇ du vecteur déplacement élémentaire, ◇ des longueur, surface et volumes élémentaires, ◇ du vecteur vitesse et de sa norme, ◇ du vecteur accélération et de se norme.	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r}$ et $\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert = r$ ◇ $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + \mathrm{d}d\theta\vec{e_\theta}$ ◇ $d\ell = \mathrm{d}r$ ou $\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\theta$; $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ◇ $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ ◇ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta}$
Expressions en coordonnées cylindriques : ◇ du vecteur position et de sa norme, ◇ du vecteur déplacement élémentaire, ◇ des longueur, surface et volumes élémentaires, ◇ du vecteur vitesse et de sa norme, ◇ du vecteur accélération et de se norme.	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ et $\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert = \sqrt{r^2+h^2}$ ◇ $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$ ◇ $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}r$ ou $\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\theta$ ou $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}z$; $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ ou $\mathrm{d}S = r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$; $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$ ◇ $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$ ◇ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}$
Pour un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω donner l'expression : ◇ du vecteur position, ◇ du vecteur vitesse, ◇ du vecteur accélération (on donnera une expression en fonction de la norme de la vitesse).	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\vec{e_r}$ ◇ $\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta}$ ◇ $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e_r} + R\dot{\omega}\vec{e_\theta} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r} + \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$

Que devient l'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ?	$\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$
Qu'est ce qu'un mouvement uniforme ?	C'est un mouvement qui se fait à **norme** du vecteur vitesse constante.
Comment démontrer qu'un mouvement est uniforme ?	$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v} = 0$.
Comment caractériser un mouvement accéléré ? Ralenti ?	C'est un mouvement pour lequel $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont orientés dans le même sens $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v} > 0$ (ou le sens contraire pour un mouvement ralenti $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v} < 0$). A savoir démontrer !
Dans quels cas utilise-t-on les coordonnées polaires ?	Mouvement plan autour d'un axe ou d'un point.
Dans quels cas utilise-t-on les coordonnées cylindriques ?	Mouvement 3D autour d'un axe ou d'un point.
Dans quels cas utilise-t-on les coordonnées cartésiennes ?	Mouvement rectiligne ou mouvement quelconque.

Tester les Bases

TLB$_{\text{MtE}}$ 1 Coordonnées cartésiennes

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont à chaque instant :

$$\begin{cases} x(t) = a_0\,t^2 + x_0 \\ y(t) = -v\,t \\ z(t) = z_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \text{ m} \\ z_0 = -1 \text{ m} \\ a_0 = 2 \text{ m/s}^2 \\ v = 2 \text{ m/s} \end{cases}$$

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 2$ s.

3. Calculer la norme de l'accélération de M à la date $t = 1$ s.

TLB$_{\text{MtE}}$ 2 Coordonnées cylindriques

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont à chaque instant :

$$\begin{cases} r(t) = a_0\,t^2 + r_0 \\ \theta(t) = \omega\,t - \theta_0 \\ z(t) = -v\,t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_0 = 1 \text{ m} \\ \omega = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ a_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ \theta_0 = 2 \text{ rad} \\ v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 1$ s.

3. Calculer la norme de l'accélération de M à l'instant initial.

TLB$_{\text{MtE}}$ 3 Mouvement circulaire

Au cours de leur entraînement, pour habituer leur organisme à supporter les fortes accélérations du décollage et de l'entrée dans l'atmosphère, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur R, en rotation à vitesse angulaire Ω constante.

1. Exprimer la vitesse et l'accélération à l'extrémité du bras de la centrifugeuse, dans la base locale des coordonnées polaires.

2. Calculer Ω en tours par minute si $R = 5,0$ m et si l'accélération obtenue vaut 6 g, où g est l'accélération de la pesanteur terrestre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3. En déduire la vitesse à l'extrémité du bras. Donner sa direction.

TLB$_{\text{MtE}}$ 4 Analyse

On donne les équations horaires de différents mouvements dans le plan (Oxy) du point M. Indiquer dans chaque cas les caractéristiques du mouvement.

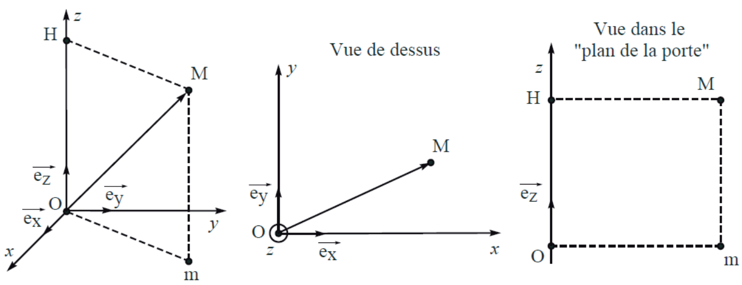
1. $x(t) = at^2 - bt + c$ et $y(t) = 2c$.

2. $r(t) = 2c$ et $\theta(t) = dt + e$.

3. $r(t) = bt + c$ et $\theta(t) = 2e$.

TLB$_{\text{MtE}}$ 5 Base cylindrique

Faire apparaître sur les 3 schémas les vecteurs de la base cylindrique et les coordonnées cylindriques correspondantes. Exprimer dans cette base locale le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$.



TLB MtE 6 Mouvement rectiligne

On considère deux points A et B astreints à se déplacer sur un axe Ox. Leurs abscisses respectives x_A et x_B sont données en fonction du temps par $x_A = at^2 + b$ et $x_B = ct$ avec a,b,c positifs.

1. Déterminer les expressions des vitesses et accélérations de A et B. Comment qualifiez vous les deux mouvements ?

2. Déterminer les dates pour lesquelles les deux mobiles occupent la même position. A quelle condition sur a, b et c ces dates existent-elles ?

TLB MtE 7 Mouvement périodique

On considère un point A astreint à se déplacer sur un axe Ox. Son abscisse x_A est donnée en fonction du temps par $x_A = a\cos(\omega\, t + \varphi)$ avec a positif.

1. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'accélération de A.

2. Déterminer les positions pour lesquelles la vitesse est nulle ? maximale ?

3. Même question pour l'accélération.

4. Tracer le graphe de la vitesse en fonction de la position.

TLB MtE 8 Freinage

Une voiture animée d'une vitesse $v_0 = 90\,\mathrm{km/h}$ sur une trajectoire rectiligne freine avec une accélération constante de norme $a = 4.2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Calculer la durée et la distance de freinage.

Exercices

Ex 1 Rotation propre de la Terre

On considère le mouvement de rotation propre de la Terre autour de son axe Δ. Ce mouvement est uniforme et sa période est appelée jour sidéral. Elle vaut $J_s =$ 23h 56 min 4s. Déterminer la vitesse de notre salle de classe dans le référentiel géocentrique.

Ex 2 Parking

Une voiture située au cinquième sous-sol d'un parking sous-terrain entame sa remontée vers la surface. Cette voiture est repérée par ses coordonnées cylindriques :

$$\rho = R \qquad \theta = \omega.t \qquad z = a.t$$

où R, ω et a sont des constantes.

1. Quelle est la trajectoire de ce véhicule ?

On note h la distance séparant deux positions successives du véhicule correspondant à un même angle θ.

2. Etablir la relation entre a et h.

3. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en un point quelconque de la trajectoire.

4. Montrer que le mouvement est uniforme.

Ex 3 Manège

On considère un manège tournant à la vitesse ω. Un enfant assimilé à un point matériel part du centre O et marche uniformément le long d'un rayon du manège. Déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires dans le référentiel lié au sol. Tracer l'allure de la courbe.

Ex 4 Tangente à la trajectoire

Les coordonnées d'un point matériel par rapport à un repère fixe (Ox, Oy, Oz) sont

$$\begin{cases} x(t) = 4.t^2 \\ y(t) = 4\,(t - t^3/3) \\ z(t) = 3t + t^3 \end{cases}$$

Déterminer le vecteur vitesse et montrer que la tangente à la trajectoire fait un angle constant avec l'axe Oz.

Ex 5 Dépassement

Une voiture de longueur $d = 4\,\mathrm{m}$ suit un camion de longueur $D = 10\,\mathrm{m}$ à la vitesse $v_0 = 72\,\mathrm{km/h}$ sur une route droite et horizontale. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors $L = 35\,\mathrm{m}$. A un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante $a = 3.0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

1. Etablir l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de l'avant de la voiture ainsi que celle de l'avant du camion $X(t)$.

2. Si on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est $20\,\mathrm{m}$ devant l'avant du camion, calculer la durée du dépassement ainsi que la distance parcourue par le camion pendant ce temps.

Ex 6 Test de Stabilité

Lors d'un test de stabilité une voiture repérée par le point G de coordonnées (x, y) dans le référentiel $\mathcal{R}$ est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale horizontale de slalom entre des plots espacés d'une distance L de manière à conserver à tout moment une vitesse $\dot{x} = v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$ Si on veut conserver à tout moment une accélération inférieure à $0.7\,g$ à quelle distance minimum doit-on placer les plots ? On notera $d_0 = 3\,\mathrm{m}$ l'amplitude de la sinusoïde.

Ex 7 Mouvement circulaire uniforme

Une araignée assimilable à un point matériel M se déplace par rapport à un repère $0xyz$ selon les équation horaires cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = a\sin(\omega t) \\ y(t) = a\sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \\ z(t) = a\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad \text{avec } a = cste \text{ et } \omega = cste.$$

1. Montrer que la trajectoire de M est contenue dans un plan passant par O et donner son équation cartésienne.

2. Montrer que l'araignée se déplace sur un cercle de centre O et donner son rayon.

3. Calculer la norme du vecteur vitesse de l'araignée à chaque instant. Comment peut-on qualifier le mouvement ?

4. Calculer la période T de ce mouvement.

Ex 8 Vol d'un insecte

Un insecte M, en mouvement dans un plan (Oxy) vole à vitesse constante en norme v_0 de sorte que l'angle α entre le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et la visée d'un point lumineux O soit constant : $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{MO}) = \alpha$.

1. Exprimer, en fonction de v_0, et α les composantes en coordonnées cylindriques de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'insecte.

2. A l'instant initial $t = 0$, $r(0) = r_0$ et $\theta(0) = 0$. Exprimer l'accélération en fonction de v_0, r_0, α et t.

3. Déterminer et tracer la trajectoire de l'insecte.

4. Au bout de combien de temps l'insecte atteint-il le point O ? Que vaut l'accélération à cet instant ? De quel angle θ_f aura-il tourné entre $t = 0$ et $t = t_f$ où il se retrouve à la distance r_f du point O. Commenter le cas où $r_f = 0$.

Ex 9 Mouvement cycloidal

Une roue de rayon R et de centre C se déplace dans un plan vertical Oxz de sorte que la vitesse de son centre C vérifie $x_c = v_0 t$ où $v_0 > 0$ est une constante. Un point M de la roue situé à la distance r de son centre C tourne avec celle-ci à la vitesse angulaire constante ω.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de la position M en fonction e r, v_0, ω et t.

2. On note R le rayon de la roue et on impose $v_0 = \omega R$. Expliquer pourquoi cette condition correspond à l'absence de tout dérapage de la roue dans le plan horizontal (Oxy) sur lequel elle roule.

3. Pour r quelconque déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de M. Tracer la trajectoire pour $r = R$.

Ex 10 Trajectoire particulière

Un mobile est en mouvement dans le plan (Oxy) sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $r = 2R\cos(\theta)$. Au cours de ce mouvement l'angle θ varie de sorte que $\dot{\theta} = \dfrac{\Omega}{\cos^2(\theta)}$.

R et Ω sont des constantes positives.

1. Déterminer la nature de $(\mathcal{C})$: on établira son équation cartésienne. Tracer la courbe correspondante.

2. Déterminer la vitesse du mobile en coordonnées polaires en fonction de R, Ω et θ. Montrer que l'accélération est en permanence dirigée vers le point O.

3. Quelle est la durée nécessaire pour un parcours complet de cette trajectoire ?

Ex 11 Mouvement rectiligne sinusoidal

On dit que le mouvement de M est sinusoïdal (ou oscillatoire simple ou harmonique) si l'équation de mouvement est de la forme : $x(t) = A_1\cos(\omega t) + B_1\sin(\omega t) + x_o$

1. Montrer que cette fonction est solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_o$.

2. Montrer que par un changement d'origine, on peut faire disparaître le terme x_o.

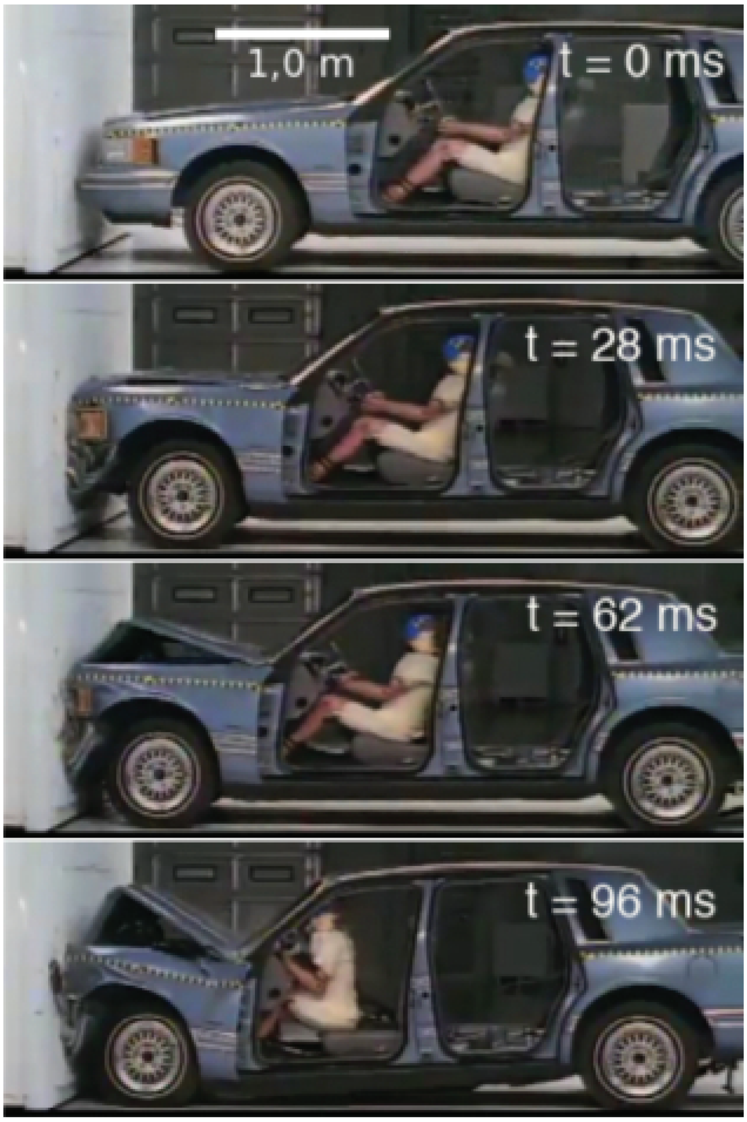
3. Montrer alors que l'on peut mettre $x(t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer l'expression de A et φ en fonction de A_1 et B_1.

4. Déterminer l'expression de la période du mouvement T.

5. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'accélération du mouvement.

RP 1 Choc Frontal

Une personne entraînée n'a pas de risque de se blesser si la décélération qu'elle subit est inférieure à dix fois l'accélération de la pesanteur.
Pour éviter que la ceinture de sécurité ne soit cause de blessures, l'association Euro NCAP 2 recommande que la force exercée par la ceinture sur l'individu ne dépasse pas $16000\ \mathrm{N}$.



Pourquoi les voitures ont-elles une carrosserie déformable ? Pour un conducteur équipé d'une ceinture, à partir de quelle vitesse un choc frontal lui est-il fatal ?