Mouvement dans un champ de force centrale

TD-M6

Tester les connaissances

Définir un mouvement à force centrale.	Le mouvement de $M(m)$ est à force centrale si M est soumis à une force $\overrightarrow{F}$ qui passe à chaque instant par un point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. La norme de cette force $\overrightarrow{F}$ ne dépend que de la distance r de M au point O. $\overrightarrow{F} = F(r).\overrightarrow{u}_r$
Citer 3 caractéristiques d'un mouvement à force centrale	◇ La trajectoire est plane. ◇ Le moment cinétique est constant. ◇ Le mouvement suit la loi des aires. → connaître la démonstration de ces propriétés.
Enoncer la loi des aires	Durant des intervalles de temps égaux, le rayon vecteur balaie des surfaces égales.
Enoncer les lois de Képler	◇ Les orbites des centres des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers (1605). ◇ Le rayon vecteur issu du soleil et aboutissant au centre d'une planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux. (loi de aires 1604). ◇ Le carré du temps de révolution est proportionnel au cube du demi grand axe de l'ellipse : $$\frac{T^2}{a^3} = cste$$ La constante a la même valeur pour toutes les planètes du système solaire.
Relier la masse de la Terre, la constante de gravitation universelle, l'accélération de la pesanteur et le rayon de la Terre	A la surface de la Terre, on égalise la poids d'un point matériel à son interaction gravitationnelle : $$g = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2}$$
Exprimer la vitesse d'un satellite en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.	L'application du PFD (dans un référentiel supposé galiléen) conduit à $$v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R}}$$
Retrouver la troisième loi de Képler dans le cas d'une trajectoire circulaire	(lien entre la période, la vitesse et le périmètre par exemple) : $$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$

Définir et exprimer la première vitesse cosmique	La première vitesse cosmique est une vitesse limite qui correspond à la vitesse minimale qu'il faut donner à un satellite pour le mettre en orbite autour de la Terre. $$v_1 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{gR_T} = 8\ \mathrm{km/s}$$
Définir et exprimer la deuxième vitesse cosmique	La deuxième vitesse cosmique (vitesse de libération) correspond à la vitesse minimale nécessaire pour quitter l'attraction gravitationnelle de la terre à partir du sol. $$v_2 = \sqrt{2\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2}v_1 = 11\ \mathrm{km/s}$$
Citer les propriétés des satellites géostationnaires	◇ le plan de l'orbite doit être situé dans le plan de l'équateur. ◇ le mouvement du satellite doit être synchrone avec le mouvement de rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles. ◇ l'orbite doit être circulaire.
Définir le jour sidéral	Le jour sidéral est la durée nécessaire à la Terre pour faire un tour sur elle-même. $$T_S = 23\mathrm{h}56\ \mathrm{min}$$

Tester les Bases

TLB MtE 1 Masse du Soleil

Le référentiel de Kepler du Soleil peut être considéré comme galiléen. On suppose que la trajectoire de la terre autour du Soleil est un cercle de rayon R.

1. Etablir la relation entre vitesse angulaire de révolution Ω de la Terre autour du Soleil en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, R et de la masse du Soleil M_S.

2. En déduire la durée de l'année terrestre T. Application numérique : calculer M_S.

TLB MtE 2 Premier satellite artificiel terrestre

Spoutnik 1 est un satellite artificiel de la terre de masse $m = 83,6\ \mathrm{kg}$. Sa trajectoire est elliptique de demi-grand axe : $a = 6955\ \mathrm{km}$. Quelle est sa période ? son énergie mécanique ? On rappelle la masse de la terre : $M_T = 6.10^{24}\ \mathrm{kg}$ et le rayon terrestre : $R_T = 6370\ \mathrm{km}$.

TLB MtE 3 Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération à la surface des astres suivants :

1. la Lune : $M_L = 7,4.10^{22}\ \mathrm{kg}$ et $R_L = 1700\ \mathrm{km}$.

2. Mars : $M_{Ma} = 6,4.10^{23}\ \mathrm{kg}$ et $R_{Ma} = 3400\ \mathrm{km}$.

3. Lune : $M_{Me} = 3,3.10^{23}\ \mathrm{kg}$ et $R_{Me} = 2440\ \mathrm{km}$.

Exercices

Ex 1 Nature d'une trajectoire

On considère un satellite artificiel de masse $m = 1$ t assimilé à un point matériel M se trouvant à l'instant $t = 0$ à la distance $r_0 = 12000$ km du centre O de la Terre. Sa vitesse à cet instant est $v_0 = 8$ km/s On donne la vitesse v_0 et la distance r_0 au centre de force O en un point de la trajectoire. Quelle est la nature de la trajectoire de ce satellite par rapport à la Terre ?

Ex 2 Comète

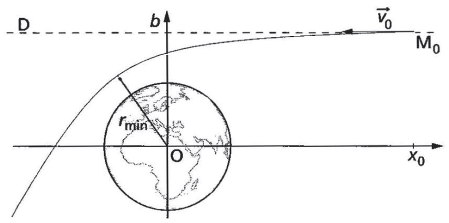
Une comète est passée en 1843 au voisinage du soleil sur une orbite parabolique. La distance minimale comète-soleil a été $d = 6.1\,10^{-3}R$ où $R = 150.10^6$ km est le rayon de l'orbite terrestre.

1. Déterminer la vitesse maximale de la comète.

2. En réalité l'orbite de la comète a une excentricité $e = 1-x$ avec $x = 9.4\,10^{-5}$. En quelle année la comète reviendra-t-elle ?

Ex 3 Astéroide

On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et on néglige les effets gravitationnels du soleil. Un astéroïde M de masse m négligeable devant la masse M_T de la terre est repéré en M_0 à une très grande distance de la Terre où on supposera que son influence gravitationnel est négligeable. On mesure son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{e_x}$ porté par la droite (M_0x_0) telle que la distance du centre de la Terre à cette droite est noté b. On appelle b le paramètre d'impact.



1. Montrer que $E_m(M)$ et le moment cinétique de l'astéroïde se conservent. Exprimer les deux constantes du mouvement en fonction des conditions initiales.

2. Exprimer l'énergie potentielle effective en fonction de r, m, M_T et L_0

3. Déterminer la distance minimale r_{min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre et donner la condition de non collision. On utilisera le potentiel effectif.

Ex 4 Orbite géostationnaire

Un corps se trouvant sur une orbite géostationnaire possède une période de révolution égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même. Il paraît immobile par rapport à a surface de la Terre. L'orbite est circulaire. Le maintien nécessite des manoeuvres de correction d'orbite consommant des ergols. Leur épuisement est la principale cause de fin de vie du satellite. En 2005, on comptait plus de 1100 objets de plus d' 1m sur l'orbite géostationnaire. Parmi eux, seulement 350 étaient des satellites opérationnels.

La ceinture de Van Allen est à une altitude comprise entre 2000 km et 22000 km. Elle est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui aveuglent les équipements satellites.

1. Déterminer, en appliquant le PFD le rayon R de l'orbite puis son altitude h. Vérifier que les satellites géostationnaires ne sont pas dans la ceinture de Van Allen.

2. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'énergie mécanique en fonction de $\mathcal{G}$, R, m_{sat} et M_T.

3. En orbite un réservoir d'appoint du satellite explose et lui procure un incrément de vitesse $v = 6$ km/s. Est-ce suffisant pour l'arracher de l'attraction terrestre ?

Ex 5 Chute du satellite

On admet que les deux formules établies en 2. à l'exercice précédent restent correctes.

1. Déterminer la loi donnant l'évolution de R au cours du temps dans le cas du frottement du satellite dans l'atmosphère (de masse volumique ρ) : $\overrightarrow{f} = -k\rho\overrightarrow{v}$. On utilisera le théorème de la puissance cinétique.

2. Dans le cas d'un satellite spot ($m_{sat} = 2$ tonnes) de coefficient $k = 1,35.10^5$ usi à 822 km d'altitude, la masse volumique de l'air est $\rho = 3.10^{-14}$ kg/m^3. Calculer de combien de mètres le satellite chute en 1 jour.

3. S'il évoluait à 250 km d'altitude, la masse volumique de l'air serait $\rho = 6,8.10^{-11}$ kg/m^3. Effectuer le même calcul et conclure.

Ex 6 Satellite artificiel terrestre

Un satellite de la Terre de masse $m = 190$ kg a une période $T = 1h35$ sur sa trajectoire elliptique. Sa distance minimale au centre de la terre est : $d = 6800$ km.

1. Démontrer l'équivalent de la troisième loi de Képler dans le cas d'une trajectoire circulaire.

2. En généralisant cette relation aux trajectoires elliptiques, calculer le demi-grand axe de la trajectoire elliptique.

3. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du satellite.

4. Quelles sont les vitesses maximales et minimales du satellite sur sa trajectoire ?

Ex 7 Transfert d'orbite

Pour placer un satellite sur une orbite géostationnaire, on le place d'abord sur une orbite basse circulaire située à l'altitude $h_p = 200$ km. On l'injecte ensuite sur une orbite de transfert, ellipse dont la Terre est un foyer, le périgée se trouve sur l'orbite basse et l'apogée sur l'orbite géostationnaire d'altitude $h_A = 35800$ km.

1. Représenter sur un schéma la trajectoire du satellite.

2. Quelle est la vitesse du satellite sur l'orbite basse ?

3. Quelle est l'excentricité de l'orbite de transfert ?

4. Quel est le temps nécessaire au transfert ?

5. Calculer la vitesse du satellite à une altitude z.

6. Calculer l'incrément (c'est à dire le complément) de vitesse à fournir au satellite pour chacun des changements d'orbite.

Ex 8 Vecteur de Runge-Lentz

But : retrouver l'équation de la trajectoire elliptique d'un satellite (HP).

On considère une particule ponctuelle de masse m dont la position est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de repère. Sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est notée $\overrightarrow{v}$. La particule est plongée dans un champ de force dérivant du potentiel $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ avec $\alpha > 0$.

1. Montrer que le moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$ est un vecteur constant. Exprimer $L_z = L_{O/\mathcal{R}}$ en fonction de m, r et θ. Cette relation est une intégrale première du mouvement.

2. Montrer que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement. Exprimer E_m en fonction de r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, m et α.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}} - \alpha \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$ est une intégrale première du mouvement. Comment sont disposés l'un par rapport à l'autre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$. Quelles sont les coordonnées polaires A_r et A_θ ?
On pose $\overrightarrow{e_x}$ suivant le vecteur $\overrightarrow{A}$. Montrer que dans ces conditions r, $\dot{\theta}$ et $\dot{r}$ peuvent être exprimés comme des fonctions de la seule variable θ et des paramètres L_z, A, m et α. Donner ces expressions.

4. Mettre l'expression de r sous la forme $\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta)$. A quelle courbe correspond cette fonction ? Exprimer p et e en fonction de L_z, A, m et α.. Quelle valeur maximale A_{max} peut prendre A pour que le mouvement reste de dimension finie. Pour une valeur inférieure à A_{max}, tracer l'allure de la courbe en indiquant le position du vecteur $\overrightarrow{A}$.

Eléments de réponse

TLB$_{\text{MtE}}$ 1

1. $\Omega = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_s}{R^3}}$

2. $M_s = 2,01.10^{30}$ kg.

TLB$_{\text{MtE}}$ 2

T =1h 36 min. $E_m = -2,4$ GJ.

TLB$_{\text{MtE}}$ 3

Vitesse de libération : cette vitesse est caractérisée par une énergie mécanique nulle (trajectoire parabolique) à la surface de l'astre de rayon R.

1. $v_L = 2,4$ km/s.

2. $v_{Ma} = 5,0$ km/s.

3. $v_{Me} = 4,2$ km/s.

Ex 1

Ellipse.

Ex 2

$v_=540$ km/s et $T = 523$ ans.

Ex 3

1. $E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, $L_{O/\mathcal{R}g}(M) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\overrightarrow{v_0} = mbv_0\overrightarrow{e_{z0}}$.

2. $E_{peff} = \dfrac{L_0^2}{2mr^2} - \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{r}$

3. $r_{min} = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\left(\sqrt{1 + \dfrac{b^2v_0^4}{\mathcal{G}^2M_T^2}} - 1\right)$.

Ex 4

1. $R = 42300$ km, $h = 35900$ km.

2. $E_m = -\dfrac{1}{2}\mathcal{G}\dfrac{M_T m_{sat}}{R}$.

3. $E_m = m_{sat} \times 8,5.10^6 > 0$.

Ex 5

1. $R(t) = R(0).exp\left(-\dfrac{2k\rho}{m_{sat}t}\right)$.

2. $\Delta z = -2,5$ m/jour.

3. $\Delta z = -5,3$ km/jour.

Ex 6

3. $E_m = -5,5$ GJ.

4. $R_{min} = 6800$ km et $R_{Max} = 7010$ km. $v_{Max} = 7,7$ km/s et $v_{min} = 7,5$ km/s.

Ex 7

2. $v_{Max} = 7,8$ km/s.

3. $e = 0,73$.

4. Temps de transfert : 5h15min.

5. $v(z) = \sqrt{2\mathcal{G}M_T\left(\dfrac{1}{R_T + h} - \dfrac{1}{2a}\right)}$.

6. Incrément de vitesse : $\Delta v_1 = 2,45$ km/s, $\Delta v_2 = 1,47$ km/s.

Ex 8

1. $L_z = mr^2\dot{\theta}$.

2. $E_m = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \dfrac{\alpha}{r} =$ cste.

3. $\perp$ $\overrightarrow{L_O}\overrightarrow{A}$. $A_r = mr^3\dot{\theta}^2 - \alpha$ et $A_\theta = -mr^2\dot{r}\dot{\theta}$. Avec la constante des aires et $\overrightarrow{A} = A.\overrightarrow{e_x} = A\cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - A\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$, on a : $r = \dfrac{L_z^2}{\alpha m}\dfrac{1}{1 + \frac{A}{\alpha}\cos(\theta)}$. $\dot{\theta} = \dfrac{L_z}{mr^2} = \dfrac{m}{L_z^3}\left(A\cos(\theta) + \alpha\right)^2$. $\dot{r} = \dfrac{A\sin(\theta)}{L_z}$.

4. $p = \dfrac{L_z^2}{\alpha m}$ et $e = \dfrac{A}{\alpha}$.

5. $E_m = \dfrac{m}{2L_z^2}\left(A^2 - \alpha^2\right)$ et $a = \dfrac{\alpha L_z}{m\left(\alpha^2 - A^2\right)}$.