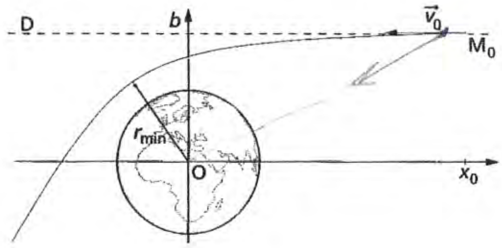
Ex 6 Astéroide

On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et on néglige les effets gravitationnels du soleil. Un astéroïde M de masse m négligeable devant la masse M_T de la terre est repéré en M_0 à une très grande distance de la Terre où on supposera que son influence gravitationnel est négligeable. On mesure son vecteur vitesse $\vec{v_0} = -v_0\vec{e_x}$ porté par la droite (M_0x_0)telle que la distance du centre de la Terre à cette droite est noté b. On appelle b le paramètre d'impact.



$\odot\ \vec{e_z}$

1. Montrer que $E_m(M)$ et le moment cinétique de l'astéroïde se conservent. Exprimer les deux constantes du mouvement en fonction des conditions initiales.

2. Exprimer l'énergie potentielle effective en fonction de r, m, M_T et L_0 , $\mathcal{G}$

3. Déterminer la distance minimale r_{min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre et donner la condition de non collision. On utilisera le potentiel effectif.

① Le satellite se rapproche de la Terre et est soumis à son attraction.

→ $\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\vec{e_r}$ force conservative $U = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r}$

TEM dans le réf géocentrique supposé galiléen $E_m = $ cste.

→ $\vec{L_O}(M) = \vec{OM}\wedge\vec{v}(M)$ + TMC $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ $\left.\frac{d\vec{L_O}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

CI $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$ (on néglige E_p devant $E_c(0)$)

$\vec{L_O} = -mbv_0\vec{e_z}$

② $E_m = \frac{1}{2}m\left((r\dot{\theta})^2 + \dot{r}^2\right) - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r}$ et $C = r^2\dot{\theta}$

$E_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2m}\frac{L_0^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r}$

③ Distance minimale

$E_m > 0$ donc la trajectoire est une hyperbole.

A la distance minimale $\dot{r} = 0$.

d'où $E_m = E_{peff}$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2m} \frac{L_0^2}{r_m^2} - G \frac{M_T m}{r_m}$$

$$m v_0^2 r_m^2 + 2 G M_T m \, r_m - \frac{L_0^2}{m} = 0$$

$$v_0^2 r_m^2 + 2 G M_T r_m - b^2 v_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4 G M_T + 4 b^2 v_0^4 > 0$$

$$\boxed{r_m = \frac{- G M_T + \sqrt{G M_T + b^2 v_0^4}}{v_0^2}}$$ (solution positive)

Ex 7 Orbite géostationnaire

Un corps se trouvant sur une orbite géostationnaire possède une période de révolution égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même. Il paraît immobile par rapport à a surface de la Terre. L'orbite est circulaire. Le maintien nécessite des manoeuvres de correction d'orbite consommant des ergols. Leur épuisement est la principale cause de fin de vie du satellite. En 2005, on comptait plus de 1100 objets de plus d' 1m sur l'orbite géostationnaire. Parmi eux, seulement 350 étaient des satellites opérationnels.

La ceinture de Van Allen est à une altitude comprise entre 2000 km et 22000 km. Elle est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui aveuglent les équipements satellites.

1. Déterminer, en appliquant le PFD le rayon R de l'orbite puis son altitude h. Vérifier que les satellites géostationnaires ne sont pas dans la ceinture de Van Allen.

2. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'énergie en fonction de $\mathcal{G}$, R, m_{sat} et M_T.

3. En orbite un réservoir d'appoint du satellite explose et lui procure la vitesse $v = 6$ km/s. Est-ce suffisant pour l'arracher de l'attraction terrestre ?

(1) Orbite circulaire + PFD dans réf. géocentrique

$* \quad -m\omega^2 R = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R^2} \qquad R = \left(\dfrac{\mathcal{G}M_T}{\omega^2}\right)^{1/3}$

et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \qquad R = \left(\dfrac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

$R = 42300$ km et $h = 35900$ km.

(2) vitesse $v = R\omega = \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad v = 3$ km/s

$E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R}$

~~$E_m = \dfrac{1}{2}m\dfrac{4\pi^2}{T^2}\times\left(\dfrac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{2/3} - \mathcal{G}M_T m \times \left(\dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T T^2}\right)^{1/3}$~~

$* \quad \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R^2} \Rightarrow v^2 = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R}$

$E_m = \dfrac{1}{2}m\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R} - \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R} = \boxed{-\dfrac{1}{2}\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R} = E_m}$

(3) Pour être arracher de l'attraction terrestre l'Em doit devenir positive.

$E_m' = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{R} + \dfrac{1}{2}mv^2 = m\left(-\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R} + \dfrac{v^2}{2}\right)$

$E_m' = m \times 8{,}5 \cdot 10^6 \text{ J} > 0.$

Ex 9 Satellite artificiel terrestre

Un satellite de la Terre de masse $m = 190$ kg a une période $T = 1h35$ sur sa trajectoire elliptique. Sa distance minimale au centre de la terre est : $d = 6800$ km.

1. Démontrer l'équivalent de la troisième loi de Képler dans le cas d'une trajectoire circulaire.

2. En généralisant cette relation aux trajectoires elliptiques, calculer le demi-grand axe de la trajectoire elliptique.

3. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du satellite.

4. Quelles sont les vitesses maximales et minimales du satellite sur sa trajectoire ?

① Traj circulaire — 3e loi de Képler

↳ E_m = cste < 0

PFD $= -mR\dot{\theta}^2 = -\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} = -\mathcal{G}\frac{M_T \cancel{m}}{R^{\cancel{2}}}$

d'où $v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R}}$

Période $T = \frac{2\pi R}{v}$ $\qquad T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2}$

$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\mathcal{G}M_T}$ $\qquad \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$

② En généralisant $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$

Masse de la Terre $g = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2}$ $\qquad \mathcal{G}M_T = g R_T^2$

$\boxed{a^3 = \frac{T^2}{4\pi^2} \times g R_T^2}$ $\qquad \underline{a = 6900 \text{ km}}$

③ Energie mécanique

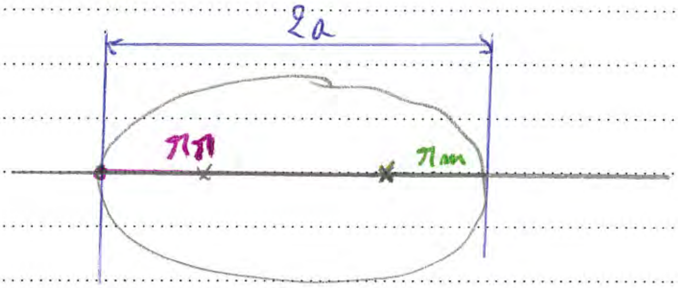
→ soit on généralise le résultat dans le cas circulaire

$E_m = \frac{-k}{2a} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{2a}$

→ soit démo...

$$\frac{C}{r}^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left((r\dot\theta)^2 + \dot r^2 \right) - G \frac{M_T m}{r}$$



$$2a = r_M + r_m$$

En r_m ou r_M $\Rightarrow$ maximum ou minimum $\dot r = 0$.

$$\begin{cases} E_m = \dfrac{1}{2} \dfrac{C^2}{r_m^2} - G \dfrac{M_T m}{r_m} \\ E_m = \dfrac{1}{2} \dfrac{C^2}{r_M^2} - G \dfrac{M_T m}{r_M} \end{cases}$$

donc r_m et r_M sont solutions du polynôme du 2nd degré :

$$\boxed{r^2 + \left(G \frac{M_T m}{E_m} \right) r - \frac{1}{2} \frac{C^2}{E_m} = 0}$$

$\hookrightarrow$ − Somme des racines

d'où $-(r_m + r_M) = G \dfrac{M_T m}{E_m}$

$$\boxed{E_m = - G \frac{M_T m}{2a} < 0}$$

③ <u>Vitesses min et max</u>

- $E_m = \dfrac{1}{2} m v_{max}^2 - G \dfrac{M_T m}{r_{min}}$ $\quad r_{min} = 6800\,km$ $\quad v_M = 7{,}7\,km/s$
- $E_m = \dfrac{1}{2} m v_{min}^2 - G \dfrac{M_T m}{r_{max}}$ $\quad r_{max} = 7000\,km$ $\quad v_{min} = 7{,}5\,km/s$.

Ex 10 Transfert d'orbite

Pour placer un satellite sur une orbite géostationnaire, on le place d'abord sur une orbite basse circulaire située à l'altitude $h_p = 200$ km. On l'injecte ensuite sur une orbite de transfert, ellipse dont la Terre est un foyer, le périgée se trouve sur l'orbite basse et l'apogée sur l'orbite géostationnaire d'altitude $h_A = 35800$ km.

1. Représenter sur un schéma la trajectoire du satellite.

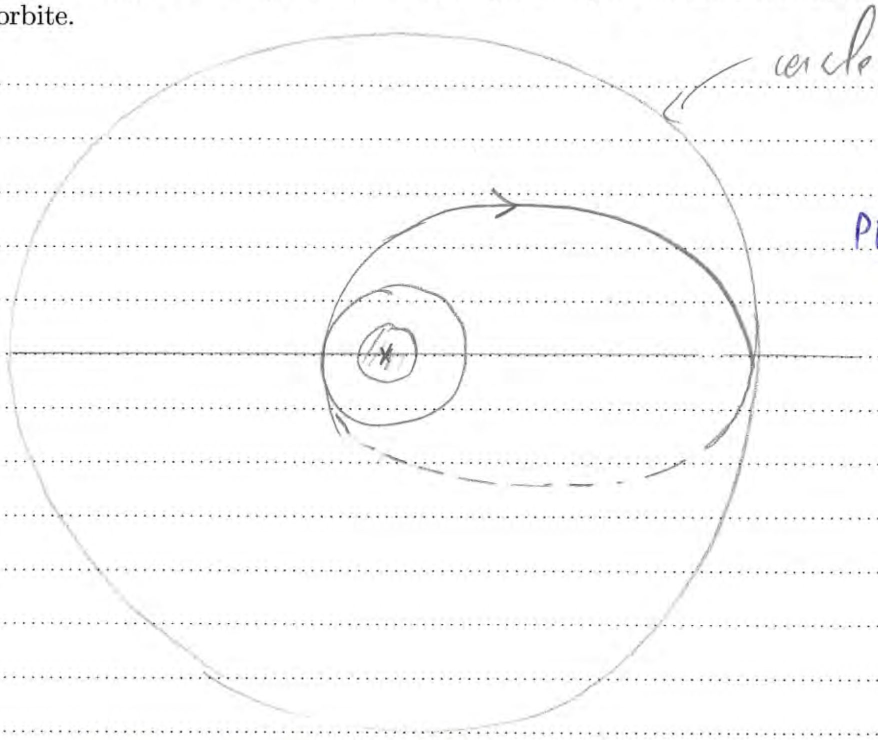
2. Quelle est la vitesse du satellite sur l'orbite basse ?

3. Quelle est l'excentricité de l'orbite de transfert ?

4. Quel est le temps nécessaire au transfert ?

5. Calculer la vitesse du satellite à une altitude z.

6. Calculer l'incrément (c'est à dire le complément) de vitesse à fournir au satellite pour chacun des changements d'orbite.



2- Vitesse sur l'orbite basse :

PFD $-m\frac{v^2}{R} = -G\frac{M_T m}{R^2}$

$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h_p}}}$$

③ Orbite de transfert

périgée $r_{min} = R_T + h_p$ apogée $= r_{max} = R_T + h_a$

$r_{min} = \frac{p}{1+e}$ $r_{max} = \frac{p}{1-e}$

$\frac{r_{min}}{r_{max}} = \frac{1-e}{1+e}$ $e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$

$$\boxed{e = \frac{h_a - h_p}{2R_T + h_a + h_p}}$$ $e = 0{,}73$

④ Temps de transfert $T_t = \frac{T}{2}$

$$\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{4\pi^2}{G M_T}\right)^{-1} \qquad T_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3 \, 4\pi^2}{G M_T}}$$

$$\boxed{T_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h_A + h_P + R_T)^3 \, \pi^2}{2 \, G M_T}}} \qquad T_t = 5h\,15$$

⑤ Vitesse du satellite

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{M_T m}{r} = -G\frac{M_T m}{2a}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2 G M_T \left(\frac{1}{R_T + z} - \frac{1}{2a}\right)}}$$

⑥ Incrément de vitesse

- orbite circulaire basse $v_1 = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h_P}}$
- orbite de transfert $v(z)$
- orbite géostationnaire $v_2 = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h_A}}$

$\Delta v_1 = v(h_P) - v_1$ $\qquad \Delta v_1 = 2,45$ km/s

$\Delta v_2 = v_2 - v(h_A)$ $\qquad \Delta v_2 = 1,47$ km/s

Autre méthode pour éviter le calcul $v(z)$:

Changement d'orbite en un point donné donc à E_p = cste

$$\frac{1}{2} m \left(v_{e}^2 - v_1^2\right) = E_{m e} - E_{m 1} \; \ldots$$

Ex 8 Chute du satellite

On admet que les deux formules établies en 2. à l'exercice précédent restent correctes.

1. Déterminer la loi donnant l'évolution de R au cours du temps dans le cas du frottement du satellite dans l'atmosphère (de masse volumique ρ) : $\vec{f} = -k\rho\vec{v}$. On utilisera le théorème de l'énergie mécanique.

2. Dans le cas d'un satellite spot ($m_{sat} = 2$ tonnes) de coefficient $k = 1,35.10^5$ usi à 822 km d'altitude, la masse volumique de l'air est $\rho = 3.10^{-14}$ kg/m^3. Calculer de combien de mètres le satellite chute chute en 1 jour.

3. S'il évoluait à 250 km d'altitude, la masse volumique de l'air serait $\rho = 6,8.10^{-11}$ kg/m^3. Effectuer le même calcul et conclure.

① TEM $\Delta E_m = W(\vec{f})$

$$\cancel{E_m = \frac{1}{2m}\frac{L_0^2}{r^2} - G\frac{M_T m}{r} + \frac{1}{2} m \dot{r}^2}$$

$$v^2 = \frac{G M_T}{R} \quad \text{et} \quad E_m = -\frac{1}{2}\frac{G M_T m}{R}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{v}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\cancel{G M_T} m}{R^2}\dot{R} = -k\rho v^2 = -k\rho\frac{\cancel{G M_T}}{R}$$

↳ équa diff du 1er ordre $\dot{R} + \frac{2k\rho}{m} R = 0$

$$\boxed{R(t) = R(0)\, e^{-\frac{2k\rho}{m} t}}$$

② $\Delta R = R(0)\left(1 - e^{-\frac{2k\rho\Delta t}{m}}\right)$

AN $\Delta R = 2,5$ m / jour

③ $\Delta R = 5,2$ km / jour.

M8 - TD - Ex 3 - Nature d'une trajectoire

On calcule l'énergie mécanique pour trouver son signe :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{K}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G m M_T}{r_0}$$

$E_m = -1{,}2 \cdot 10^9 \text{ J} < 0$

↳ le satellite est dans un état lié : orbite elliptique ou circulaire

* si l'orbite est circulaire, on a $v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_0}} \overset{?}{=} v_0$

$r_0 = 12\,000 \text{ km} \Rightarrow v = 5{,}76 \text{ km/s} \neq v_0$

La trajectoire est une ellipse.

TDM8 - Ex 4 - Comète

Trajectoire parabolique :

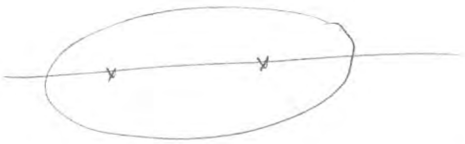
$$E_m = 0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M_S}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_S}{r}}$$

* M_S ? 3e loi de Képler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S} \Rightarrow M_S =$

$v = 541$ km/s.

2- 3e loi de Képler $\frac{a^3}{T^2} = \frac{R^3}{T_T^2}$ Cas de la Terre



Au plus proche $d = \frac{p}{1+e}$ et $p = a(1-e^2)$

$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$.

$d = a(1-e)$

d'où $a = \frac{d}{x}$

$$T^2 = \left(\frac{R^3}{T_T^2}\right)^{-1} \times \frac{d^3}{x^3}$$

$T = 523$ ans.