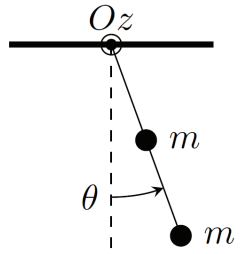
TD-M5

Moment cinétique et solide en rotation

Ex 1 Pendule lesté

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin(\theta) = 0$$

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Ex 2 Le lancer d'une toupie

On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie. On notera ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie, et on supposera qu'à l'instant $t = 0$ où l'on commence à tirer sur le fil la toupie est immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\overrightarrow{F}$.

2. Déduire du théorème de l'énergie cinétique l'accélération angulaire $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ de la toupie.

3. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés ?

Ex 3 Pendule en rotation 3D

Un point matériel M de masse m est lié par un fil inextensible de longueur ℓ à un point fixe A. La masse tourne autour de l'axe Az à vitesse angulaire constante ω. On appelle α l'angle $(-\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{AM})$. La position du point M est repérée grâce à la distance ρ entre M et l'axe Az. Les frottements sont négligés.

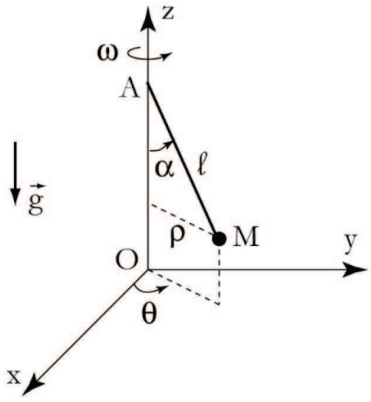
1. Donner le lien entre ℓ, α et ρ.

2. Déterminer l'expression du moment cinétique du point M par rapport à l'axe Oz.

3. Montrer que ce moment cinétique par rapport à Oz est constant. En déduire que le mouvement s'effectue à une distance constante de l'axe Oz.

4. Déterminer la tension T du fil en fonction de m, ℓ et ω.

5. En déduire l'angle α avec lequel le pendule tourne, en fonction de g, ℓ et ω.

6. Ce mouvement est-il possible pour toutes les valeurs de ω ? Préciser.

7. En déduire l'expression du rayon ρ avec lequel se fait le mouvement. Calculer ρ pour $\ell = 30$ cm et $\omega = 1$ tr/s.