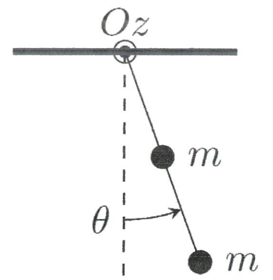
Ex 1 Pendule lesté

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin(\theta) = 0$$



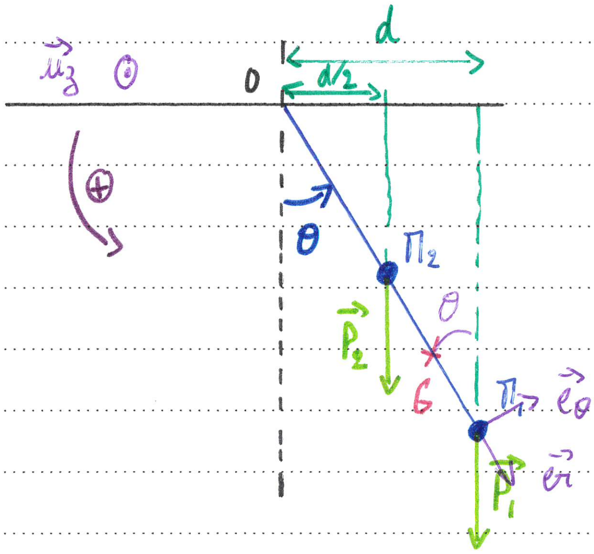
2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

① Equation du mouvement : La tige est en rotation autour d'un axe fixe (Oz) ⇒ on va appliquer le TMC.

Système : {Tige + 2 points matériels}
Réf du labo supposé galiléen.

BAME : on suppose la liaison pivot entre la tige et le bâti parfaite. son moment en O est nul.



× Poids $\vec{P_1}$ qui s'applique en Π_1
$\vec{P_1} = m\vec{g}$

Pour exprimer $\mathcal{M}_z(\vec{P_1})$ 2 méthodes :

① On exprime le moment en O puis on projette sur $\vec{u_z}$
$\mathcal{M}_z(\vec{P_1}) = (\vec{O\Pi_1} \wedge \vec{P_1}) \cdot \vec{u_z}$
en base polaire
$\mathcal{M}_z(\vec{P_1}) = (L\vec{e_r} \wedge (mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}))\cdot\vec{u_z}$
$\mathcal{M}_z(\vec{P_1}) = -mgL\sin\theta$

② On exprime le bras de levier d + signe $\quad d = L\sin\theta$

si $\theta > 0$ fait tourner dans le sens $\ominus$

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P_1}) = -mgL\sin\theta}$$

* Poids $\vec{P_2}$ qui s'applique en M_2

On procède de la même manière M_2 est situé à $L/2$ de O.

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P_2}) = -\frac{1}{2} m g L \sin\theta}$$

• <u>Expression du moment cinétique du système :</u>
On somme les moments cinétiques en O de la tige et des masses.
Le système est un solide indéformable qui tourne à la vitesse angulaire $\dot\theta$ ⇒ on peut aussi sommer les moments d'inertie ⇒ 2 méthodes.

$$L_z(S) = L_z(M_1) + L_z(M_2) + \cancel{L_z(\text{Tige})}$$

négligeable devant les autres moments cinétiques.

avec $L_z(M_1) = (\vec{OM_1} \wedge m\vec{v}(M_1)) \cdot \vec{u_z}$ et $\vec{OM_1} = L\vec{e_r}$
$\vec{v}(M_1) = L\dot\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\boxed{L_z(M_1) = mL^2\dot\theta}$$

on retrouve le moment d'inertie d'une masse à la distance L de l'axe

de même $L_z(M_2) = \left(\frac{L}{2}\vec{e_r} \wedge m\frac{L}{2}\dot\theta\,\vec{e_\theta}\right) \cdot \vec{u_z}$

$$\boxed{L_z(M_2) = \frac{1}{4} m L^2 \dot\theta}$$

moment d'inertie d'une masse à la distance $L/2$ de l'axe.

Bilan $$\boxed{L_z(S) = \frac{5}{4} m L^2 \dot\theta}$$

• On applique le TMC au système par rapport à (Oz) dans Rlabo :

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P_1}) + \mathcal{M}_z(\vec{P_2})$$

$$\frac{5}{4}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta - \frac{1}{2}\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta$$

$$\frac{5}{4}L\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}g\sin\theta$$

d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6}{5}\frac{g}{L}\sin\theta = 0}$

② Centre de gravité de l'ensemble

Par définition : $\underbrace{(\sum m_i)}_{2m}\vec{OG} = \sum(m_i\,\vec{OM_i})$

$$2m\,\vec{OG} = m\,\vec{OM_1} + m\,\vec{OM_2} = m\,L\,\vec{e_r} + m\,\frac{L}{2}\,\vec{e_r}$$

$$2\vec{OG} = \frac{3}{2}L\,\vec{e_r} \qquad \boxed{\vec{OG} = \frac{3}{4}L\,\vec{u_r}}$$

③ On considère un nouveau système : $S_2 = \{\text{Tige} + G(2m)\}$

On applique à nouveau le TMC (seule action mécanique de moment non nul : Poids) :

$$\left.\begin{aligned} M_z(\vec{P}) &= -\frac{3}{4}2mgL\sin\theta = -\frac{3}{2}mgL\sin\theta \\ L_z(S_2) &= 2m\times\left(\frac{3}{4}L\right)^2\dot{\theta} = \frac{9}{8}mL^2\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \quad \frac{9}{8}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta$$

d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{4}{3}\frac{g}{L}\sin\theta = 0}$ L'équation du mouvement obtenue est différente !

Conclusion : la dynamique d'un solide en rotation n'est pas identique à celle de son centre de gravité où on aurait ramené toute la masse.
C'est une différence fondamentale avec la dynamique d'un solide en translation qui peut se ramener à l'étude de son centre de gravité.

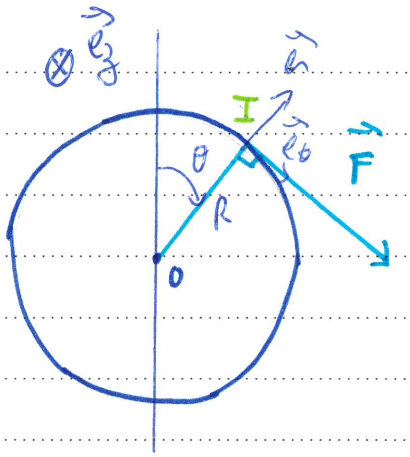
Ex 2 Le lancer d'une toupie

On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie. On notera ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie, et on supposera qu'à l'instant $t = 0$ où l'on commence à tirer sur le fil la toupie est immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\overrightarrow{F}$.

2. Déduire du théorème de l'énergie cinétique l'accélération angulaire $\dfrac{d\omega}{dt}$ de la toupie.

3. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés ?



Le fil est inextensible et transmet intégralement les efforts.

Ainsi on suppose que la force exercée par le fil sur la toupie est toujours orthoradiale et appliquée à la distance R de l'axe (Oz).

$$\vec{F} = F\,\vec{e_\theta}$$

① Puissance :

$P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(I)$ et $\vec{v}(I) = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\omega\,\vec{e_\theta}$

↳ point d'application de la force.

d'où $\boxed{P = FR\omega}$

Pour exprimer cette puissance, on peut aussi exprimer le moment de la force par rapport à l'axe (Oz).

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = +FR$ et ainsi $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_{Oz} \times \omega$

$$\boxed{P(\vec{F}) = FR\omega}$$

② Système = {Poulie} Réf du labo supposé galiléen.

BAME = Poids $\vec{P} = m g \vec{e_z}$ $M_{Oz}(\vec{P}) = 0$

Réaction du support : on néglige les frottements
$\vec{R}$ est suivant $\vec{e_z}$ $M_{Oz}(\vec{R}) = 0$

Force exercée par le fil sur la toupie $\vec{F}$: $M_{Oz}(\vec{F}) = R\omega$

On applique le théorème de l'énergie cinétique (ou de la puissance cinétique) à la poulie dans Rlabo galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}) \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$J \omega \frac{d\omega}{dt} = F R \omega \qquad \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{FR}{J} = \frac{2F}{mR}}$$

③ Vitesse angulaire On peut intégrer la relation précédente mais dans ce cas, il faut déterminer t_f. ici, il est plus simple d'appliquer à nouveau le TEC sous forme élémentaire, puis on intègre.

$$\text{TEC} : dE_c = \delta W(\vec{F}) = P(\vec{F})\,dt = F R \omega\, dt = F R \underbrace{\dot{\theta}\, dt}_{d\theta}$$

$$\Delta E_c = \int_{\theta=0}^{\theta = 4\times 2\pi} F R \, d\theta \quad \text{4 tours}$$

$$\frac{1}{2} J \omega_F^2 - \underbrace{\frac{1}{2} J \omega_i^2}_{0} = 8\pi F R$$

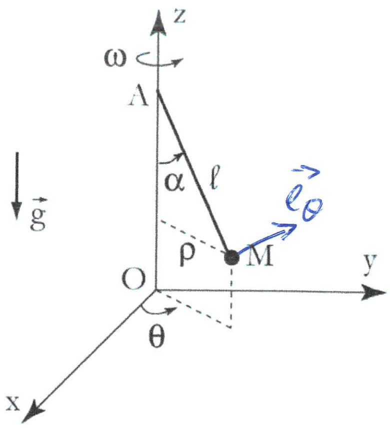
vitesse angulaire nulle à $t=0$

$$\boxed{\omega_F = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}} \qquad N \text{ vitesse en tr/s} : N = \frac{\omega_F}{2\pi}$$

AN : $F = 1\,N$ $R = 2\,cm$ $m = 40\,g$ $\underline{N \simeq 60\,tr/s}$

Ex 3 Pendule en rotation 3D

Un point matériel M de masse m est lié par un fil inextensible de longueur ℓ à un point fixe A. La masse tourne autour de l'axe Az à vitesse angulaire constante ω. On appelle α l'angle $(\widehat{-\vec{u_z}, \vec{AM}})$. La position du point M est repérée grâce à la distance ρ entre M et l'axe Az. Les frottements sont négligés.



1. Donner le lien entre ℓ, α et ρ.

2. Déterminer l'expression du moment cinétique du point M par rapport à l'axe Oz.

3. Montrer que ce moment cinétique par rapport à Oz est constant. En déduire que le mouvement s'effectue à une distance constante de l'axe Oz.

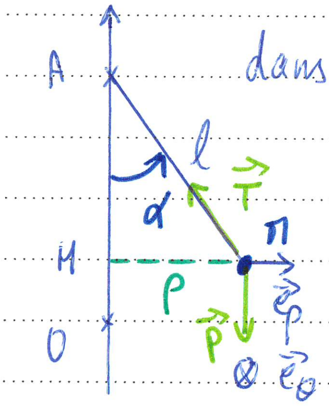
4. Déterminer la tension T du fil en fonction de m, et ω. et ℓ.

5. En déduire l'angle α avec lequel le pendule tourne, en fonction de g, et ω. et ℓ.

6. Ce mouvement est-il possible pour toutes les valeurs de ω ? Préciser.

7. En déduire l'expression du rayon ρ avec lequel se fait le mouvement. Calculer ρ pour $\ell = 30$ cm et $\omega = 1$ tr/s.

① Relation ℓ, α et ρ → Vérif : $\alpha = 0$ $\rho = 0$



dans le plan (Oz, M) ⇒ $\boxed{\rho = \ell \sin\alpha}$

② Moment cinétique → ou directement $(\vec{HM} \wedge m\vec v)\cdot\vec{u_z}$

$L_{Oz}(M) = (\vec{AM} \wedge m\vec v)\cdot\vec{u_z}$

$\vec v = \dot\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\dot\theta\,\vec{e_\theta}$ et $\dot\theta = \omega$

La masse tourne à vitesse constante et on suppose le régime permanent atteint ⇒ on s'attend à trouver ρ = cste et donc $\dot\rho = 0$

$\vec{AM} = (\vec{AH} + \vec{HM})$ ⇒ $\boxed{L_{Oz}(M) = m\rho^2\dot\theta = m\rho^2\omega}$

③ Système = $M(m)$ Réf du labo supposé galiléen

BAME Poids $\vec P$ $\mathcal{M}_{Oz}(\vec P) = 0$ car $\vec P \,//\, \vec{u_z}$

Tension du fil : $\mathcal{M}_{Oz}(\vec T) = (\underbrace{\vec{AM} \wedge \vec T}_{\vec 0 \text{ colinéaires.}})\cdot\vec{u_z} = 0$

nul car $\vec T$ coupe l'axe (Oz).

On applique le TMC à M(m) par rapport à (Oz) dans Rlabo galiléen

$$\boxed{\left.\frac{dL_{Oz}}{dt}\right|_R = \sum \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{ext}) = 0}$$

d'où $L_{Oz}(M) = cste$ $\quad m\rho^2\omega = cste$

comme $\omega = cste$ alors $\boxed{\rho = cste}$

④ Tension du fil $\vec{T}$

Méthode : ici seul le PFD peut nous permettre de déterminer $\vec{T}$ car $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) = 0$ et cette force ne travaille pas (ou alors TMC en un autre point).

PFD à M(m) dans Rlabo galiléen :

$m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T}$ avec $\vec{a}(M) = -\rho\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$

$/\vec{e_\rho}$: $-m\rho\dot{\theta}^2 = -T\sin\alpha$ ⓐ

$/\vec{e_z}$: $0 = +T\cos\alpha - mg$ ⓑ

ⓐ ⇒ $m\,l\cancel{\sin\alpha}\,\omega^2 = T\cancel{\sin\alpha}$ avec $\rho = l\sin\alpha$

on simplifie si $\alpha \neq 0$

$$\boxed{T = ml\omega^2}$$

⑤ Angle α on reporte le résultat précédent dans ⓑ

$\cos\alpha = \dfrac{mg}{T}$ $\quad \boxed{\cos\alpha = \dfrac{g}{l\omega^2}}$ vrai si $g < l\omega^2$

sinon on aura $\alpha = 0$

⑥ $\rho = l\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad \boxed{\rho = l\sqrt{1-\dfrac{g^2}{(l\omega^2)^2}}}$

$\underline{\rho = 16\text{ cm}}$