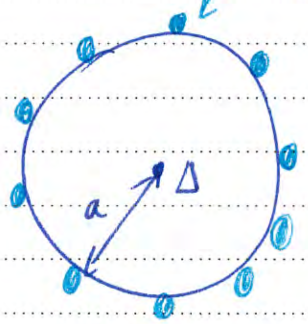
TLB I Roue

Sur une roue de voiture de masse m de rayon a et de moment d'inertie autour de son axe de rotation Δ, $J_\Delta = \frac{1}{2}ma^2$, on place une chaîne permettant de progresser sur la neige. On assimile cette chaîne à 10 points matériels de masse $\frac{m}{100}$ répartis sur la périphérie de la roue. Déterminer la masse totale de la roue équipée de la chaîne et son moment d'inertie par rapport à Δ.

modélisation de la chaîne



* Masse totale

$$M_{tot} = m + 10 \times \frac{m}{100}$$

$$\boxed{M_{tot} = 1,1 \times m}$$

* Moment d'inertie

On peut sommer les moments d'inertie exprimés par rapport à un même axe.

Chaque petite masse est assimilée à un point matériel situé à la distance a de l'axe de rotation.

$$J'_\Delta = \frac{m}{100} a^2$$

Bilan $J_{tot\,\Delta} = \frac{1}{2} m a^2 + 10 \frac{m}{100} a^2 = 0,6\, m a^2$

$$\boxed{J_{tot} = 0,6\, m\, a^2}$$

Rajouter la chaîne modifie (en grandeur relative) plus le moment d'inertie que la masse totale.
En effet, les petites masses sont ajoutées en périphérie de la roue alors que la masse de la roue se répartit sur le disque de rayon a.

TLB 2

Une fraise de dentiste est assimilée à un cylindre de rayon $a = 1,0.10^{-3}$ m et de masse $m = 10.10^{-3}$ kg et de moment d'inertie par rapport à son axe $J_\Delta = \frac{1}{2}ma^2$ et tournant à 100000 tours par minute. Calculer son moment cinétique.

Moment cinétique par rapport à l'axe de rotation

$L_\Delta = J_\Delta \times \dot{\theta}$

↳ vitesse angulaire

$$\boxed{L_\Delta = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}}$$

$$L_\Delta = \frac{1}{2}\, 10 \times 10^{-3} \times 10^{-6} \times 10^{5} \times \frac{8\pi}{60}$$

$$L_\Delta = \frac{\pi}{6}\, 10^{-3}$$

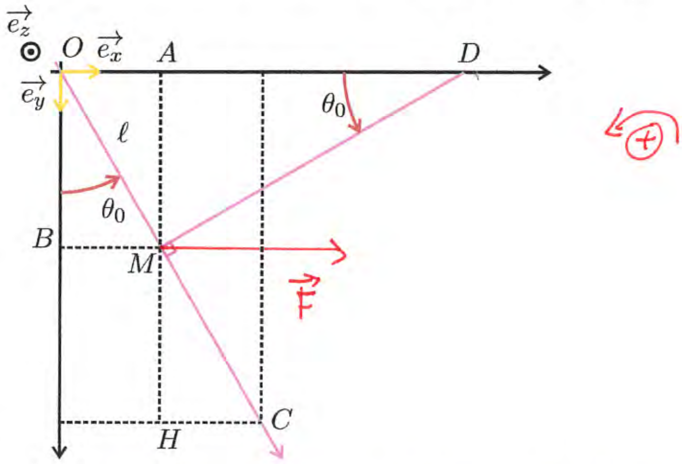
$L_\Delta \simeq 5.10^{-} \ kg.m^2 s^{-1}$

TLB 3 Calcul de moments

On considère un point matériel $M(m)$ soumis à une force $\overrightarrow{F} = F.\overrightarrow{e}_x$ constante.

1. Exprimer les moments de la force suivants : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})$, $\mathcal{M}_B(\overrightarrow{F})$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F})$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\overrightarrow{F})$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_D(\overrightarrow{F})$.

2. Exprimer les moments suivants par rapport aux axes orientés : $\mathcal{M}_{(O,\overrightarrow{e}_z)}(\overrightarrow{F})$, $\mathcal{M}_{(C,\overrightarrow{e}_z)}(\overrightarrow{F})$, $\mathcal{M}_{(D,\overrightarrow{e}_z)}(\overrightarrow{F})$.



① Moment des forces : $\overrightarrow{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = +F\ell\cos\theta_0\,\vec{e}_z$

$\overrightarrow{M}_B(\vec{F}) = \vec{0}$ (Le support de $\vec{F}$ passe par B : $\overrightarrow{BM} \,//\, \vec{F}$)

$\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = +F\ell\cos\theta_0\,\vec{e}_z$ $\qquad \overrightarrow{M}_C(\vec{F}) = -F\ell\cos\theta_0\,\vec{e}_z$

$\overrightarrow{M}_D(\vec{F}) = \overrightarrow{DM} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = F\ell\cos\theta_0\,\vec{e}_z$

↳ même bras de levier que le moment en A.

② On projète les moments précédents sur $\vec{e}_z$

$M_{Oz}(\vec{F}) = \overrightarrow{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_z = F\ell\cos\theta_0$

$M_{Cz}(\vec{F}) = \overrightarrow{M}_C(\vec{F}) \cdot \vec{e}_z = -F\ell\cos\theta_0$

$M_{Dz}(\vec{F}) = F\ell\cos\theta_0$

ou force × Bras de levier + signe.

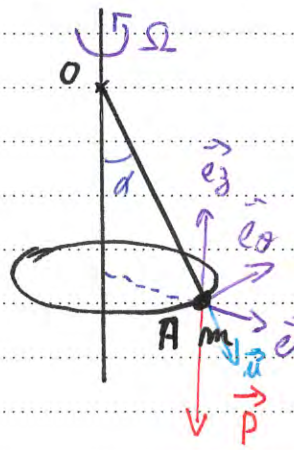
Ex 7 Cône

Un point matériel A de masse m est relié au point fixe O par un fil inextensible de longueur $OA = \ell$ et de masse négligeable. Il décrit un cône d'axe vertical et de demi-angle α à la vitesse angulaire Ω constante. On néglige tout frottement.

1. en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, établir la relation entre Ω, α et ℓ.

2. en utilisant le théorème du moment cinétique, établir la relation entre Ω, α et ℓ.

3. Discuter suivant les valeurs de Ω.



Système : Point matériel A de masse m

Ref du labo supposé galiléen

Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ $\quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = +mgR\,\vec{e_\theta}$

où R est le rayon du cercle : $R = \ell \sin\alpha$

- Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{u}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$

Accélération du point A : A décrit un cercle à la vitesse angulaire Ω = cste

$\vec{a} = -R\Omega^2\vec{e_r} = -\ell\sin\alpha\,\Omega^2\,\vec{e_r}$

Moment cinétique en O : $\vec{L_O}(A) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}$

$\vec{v} = R\Omega\,\vec{e_\theta} = \ell\sin\alpha\,\Omega\,\vec{e_\theta} \qquad \vec{OA} = -\ell\cos\alpha\,\vec{e_z} + \ell\sin\alpha\,\vec{e_r}$

$\vec{L_O}(A) = m\ell^2\Omega\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{e_r} + \underbrace{m\ell^2\Omega\sin^2\alpha\,\vec{e_z}}_{\text{cste}}$

$$\left.\frac{d\vec{L_O}(A)}{dt}\right|_R = m\ell^2\Omega^2\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{e_\theta}$$

PFD à A dans Rlabo : $-m\ell\sin\alpha\,\Omega^2\,\vec{e_r} = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\begin{array}{l|l} \vec{e_r} & -m\ell\sin\alpha\,\Omega^2 = -T\sin\alpha \; \vec{e_r} \\ \vec{e_z} & 0 = -mg + T\cos\alpha \end{array} \qquad T = \frac{mg}{\cos\alpha} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

$$-\cancel{m}\ell\sin\alpha\,\Omega^2 = -\cancel{m}g\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

soit $\begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \Omega^2 = \dfrac{g}{l} \times \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{l\Omega^2}}$$

si $\dfrac{g}{l\Omega^2} < 1$

sinon $\alpha = 0$

② TMC à A dans Rlabo galiléen et en O

$$\left.\frac{d\vec{L}_O(A)}{dt}\right|_R = \vec{M}(\vec{P}) + \vec{M}(\vec{T})$$

$$\cancel{m}\, l^{\cancel{2}}\, \Omega^2 \cos\alpha \sin\alpha = \cancel{m}\, g\, \cancel{l} \sin\alpha$$

On retrouve la même équation qu'avec le PFD mais plus rapidement (inutile de projeter $\vec{T}$).

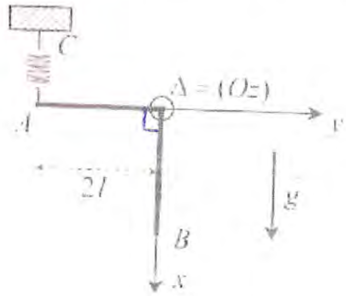
Bilan

si $\Omega < \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ alors $\alpha = 0$
la masse reste à la verticale

si $\Omega > \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ $\cos\alpha = \dfrac{g}{l\Omega^2}$
la masse décrit des cercles dès que la vitesse de rotation est suffisante.

Ex 6 Oscillation d'un solide

Un solide $\mathcal{S}$ est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre AO et OB faisant entre elles un angle droit. Chaque tige a pour masse m et pou longueur 2ℓ.
$\mathcal{S}$ peut tourner autour d'un axe horizontal $\Delta = (Oz)$ passant par O.
La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable de constant de raideur k est accroché à l'une des extrémité en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur supposé vertical et uniforme AO est horizontale et OB verticale.



On donne le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur 2ℓ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité est $I = \frac{4}{3}m\ell^2$

1. Que vaut le moment d'inertie J_Δ de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe Δ.

2. Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

On souhaite étudier les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle θ restant petit on pourra considérer que la fore exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant tout le mouvement.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période en fonction de m, g, k et ℓ.

4. Application numérique : calculer la période sachant que $m = 100$ g, $\ell = 10$ cm et $k = 12$ N/m.

① Moment d'inertie de l'ensemble des 2 tiges

Le moment d'inertie est une grandeur additive : on somme le moment de chaque barre par rapport à l'axe Δ :

$J_\Delta = 2I$. $\boxed{J_\Delta = \frac{8}{3} m\ell^2}$

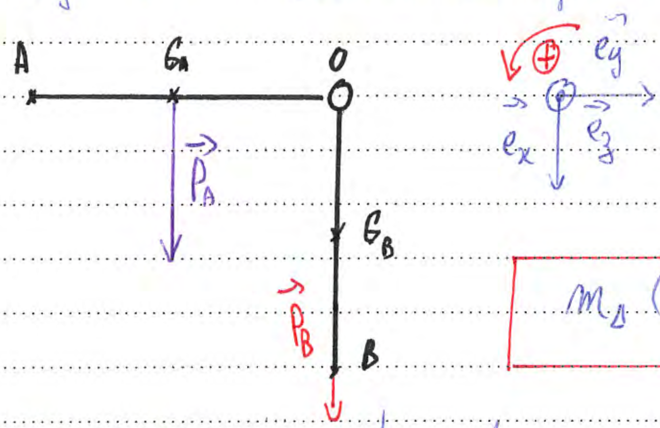
② Allongement du ressort : Système : solide S
Réf du labo supposé galiléen.

Bilan des Action extérieures :

* Réaction de la liaison pivot : s'exerce en O. liaison parfaite
  $\Rightarrow$ son moment en O est nul.

* Le poids de S : pour l'étude du poids, c'est plus simple de prendre en compte séparément le poids de chaque tige.

• Tige OA : centre de gravité au centre de la tige



↳ Bras de levier l.
↳ fait tourner dans le sens ⊕

$$\boxed{M_\Delta(\vec{P_A}) = + mgl}$$

• Tige OB : centre de gravité au centre : $\vec{OG_B}$ et $\vec{P}$ sont colinéaires

$$\boxed{M_\Delta(\vec{P_B}) = 0}$$ à l'équilibre

× Force de Rappel du ressort

A l'équilibre $\vec{F} = -k(l_{eq} - l_0)\vec{e_x}$

Bras de levier $= 2l$
quand $l_{eq} > l_0$: fait tourner dans le sens ⊖

$$\boxed{M_\Delta(\vec{F}) = -k(l_{eq} - l_0) \times 2l}$$

↳ longueur à vide

On applique le TMC au système S dans Rlabo supposé galiléen, par rapport à l'axe Δ.

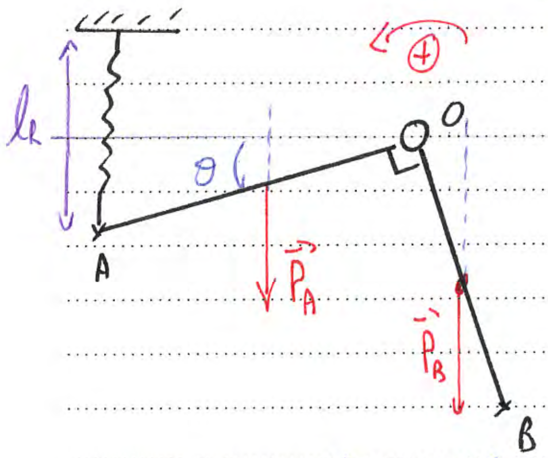
A l'équilibre $0 = mg\cancel{l} - k(l_{eq} - l_0) \times 2\cancel{l}$

$$\boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{2k}}$$ $l_{eq} > l_0$: OK.

③ Etudes petites oscillations

On va appliquer un TMC à S par rapport à l'axe Δ.

On le moment des forces par rapport à Δ :



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_A) = m g l \cos\theta$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_B) = - m g l \sin\theta$$

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = - k\,(l_R - l_0) \times 2l\cos\theta$$

$\hookrightarrow$ longueur du ressort

TMC à S dans Rlabo galiléen :

$$J_\Delta \ddot{\theta} = m g l \cos\theta - m g l \sin\theta - k\,(l_R - l_0) \times 2l\cos\theta.$$

de plus $l_R = l_{eq} + 2l\sin\theta$

$$\frac{8}{3} m l^{\cancel{2}} \ddot{\theta} + m g \cancel{l} \sin\theta + 4 l^{\cancel{2}} k \sin\theta = \underbrace{m g l \cos\theta - k(l_{eq} - l_0) 2l\cos\theta}_{\cos\theta\,(m g l - k(l_{eq}-l_0) \times 2l)} = 0$$

TMC en statique

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{3}{8}\frac{g}{l} + \frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)\sin\theta = 0}$$

On linéarise l'expression autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{g}{l} + \frac{3}{2}\frac{k}{m}}$$

$\hookrightarrow$ éq. diff harmonique

$\Rightarrow$ solutions sinusoïdales (pour des petites oscillations).

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{8 m l}{3 m g + 12 k l}}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{8 \times \overbrace{0{,}1 \times 10}^{1} \times 10^{-2}}{3 \times \underbrace{0{,}1 \times 10}_{1} + \underbrace{12 \times 12 \times 0{,}1}_{14{,}4}}}$$

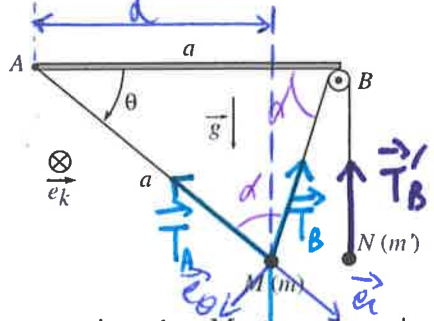
$$T_0 \simeq 2\pi \times \frac{2\sqrt{2}}{4} \cdot 10^{-1} = 0{,}44\,s$$

AN : $T_0 = 0{,}44\,s$

Ex 3 Moments des forces et équilibre

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal AB de longueur a et passant par B par une poulie parfaite de très petites dimensions.

En un point M tel que $AM = a$ est accrochée une massée ponctuelle m. Au bout du fil est aussi accrochée une masse m' en N.



1. Etablir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A. Le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

2. Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer quand il existe l'angle à l'équilibre θ_e en fonction de m et m'.

① Bilan des forces et Moments en A

Géométrie : $AB = AM \Rightarrow ABM$ triangle isocèle

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

d bras de levier

BAME : Poids $\vec P = m\vec g$ $\quad \vec{\mathcal{M}}_A(\vec P) = + mg\,\overbrace{a\cos\theta}^{d}\,\vec e_k$

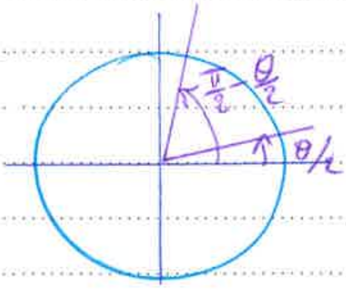
Les fils sont parfaits et inextensibles et tendus ils transmettent tous les efforts.

• $\vec T_A = -T_A\,\vec e_r$ $\quad \vec{\mathcal{M}}_A(\vec T_A) = \vec 0$ $\quad T_A = \|\vec T_A\|$

• On projette $\vec T_B$ dans la base $(\vec e_r, \vec e_\theta)$. $\quad T_B = \|\vec T_B\|$

$\vec T_B = -T_B\cos\alpha\,\vec e_r - T_B\sin\alpha\,\vec e_\theta$

$\vec T_B = -T_B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\vec e_r - T_B\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\vec e_\theta$



$\vec T_B = -T_B\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec e_r - T_B\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec e_\theta$

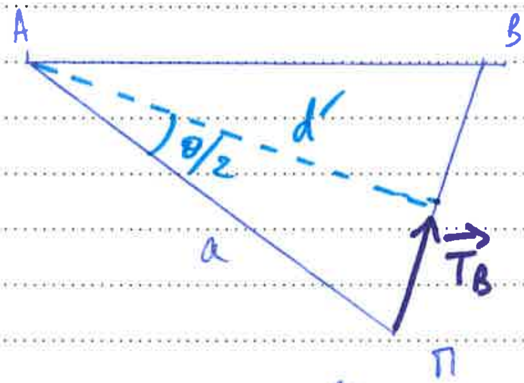
de plus la poulie en B est parfaite
⇒ l'intensité du poids qui s'exerce en N est intégralement transmise.

$\vec{T}'_B = -m'\vec{g}$ $\qquad T_B = m'g$

$$\boxed{\vec{T}_B = -m'g\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right)}$$

$\vec{M}_A(\vec{T}_B) = \vec{A\Pi} \wedge \vec{T}_B$ (produit vectoriel dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_k)$)

ou avec le bras de levier :



$\vec{M}_A(\vec{T}_B) = -d'T_B$

$d' = a\cos(\theta/2)$

$$\boxed{\vec{M}_A(\vec{T}_B) = -m'g\,a\cos\left(\theta/2\right)\vec{e}_k}$$

② Position d'équilibre

On applique le TMC au point matériel Π dans le réf du labo supposé galiléen et en A.

A l'équilibre $\sum \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_A(\vec{P}) + \vec{M}_A(\vec{T}_B) = \vec{0}$

Rq : le PFD n'est pas pratique car on ne connait pas $\vec{T}_A$.

$$m\cancel{g}\cancel{a}\cos\theta - m'\cancel{g}\cancel{a}\cos(\theta/2) = 0$$

$$\boxed{m\cos\theta - m'\cos(\theta/2) = 0}$$

$\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$ $\qquad 2\cos^2(\theta/2) - 1 - \frac{m'}{m}\cos\theta/2 = 0$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{m'}{2m}\cos(\theta/2) - 1/2 = 0$$

On pose $X = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow X^2 - \frac{m'}{2m} X - 1/2 = 0$

Pour étudier la position d'équilibre on doit chercher les racines du polynôme du 2nd degré =

$$\Delta = \left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2 > 0$$

$$\boxed{X_1 = \frac{m'/2m + \sqrt{\Delta}}{2} > 0} \qquad \boxed{X_2 = \frac{m'/2m - \sqrt{\Delta}}{2} < 0}$$

Le système (géométrie) impose $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

d'où $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ La fonction $x \to \cos x$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \cos(0)$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \leq X \leq 1}$$

On élimine X_2 car $X_2 < 0$. On cherche maintenant la relation entre m et m' pour avoir $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq X \leq 1$.

① $X \leq 1$ $\quad \frac{m'/2m + \sqrt{\Delta}}{2} \leq 1$

$m' + 2m\sqrt{\Delta} \leq 4m \qquad m' + \sqrt{m'^2 + 8m} \leq 4m$

$\sqrt{m'^2 + 8m^2} \leq 4m - m'$

On élève au carré $\quad m'^2 + 8m^2 \leq (4m - m')^2 = 16m^2 + m'^2 - 8mm'$

$0 \leq 8m(m - m')$

Bilan $\boxed{m > m'}$

② $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq X$

$\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \leq \frac{m'/2m + \sqrt{\Delta}}{\cancel{2}}$

$2\sqrt{2}\, m \leq m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}$

$0 \leq 2\sqrt{2}\, m - m' \leq \sqrt{m'^2 + 8m^2}$

$(2\sqrt{2}\, m - m')^2 \leq m'^2 + 8m^2$

$\cancel{8m^2} - 4\sqrt{2}\, m m' + \cancel{m'^2} \leq \cancel{m'^2} + \cancel{8m^2}$

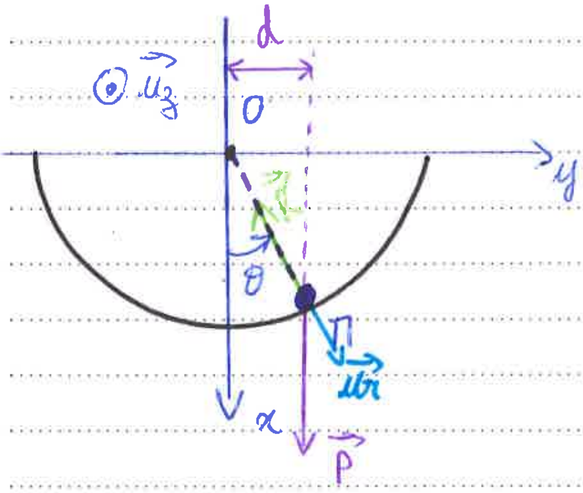
$-4\sqrt{2}\, m m' \leq 0$ Toujours vrai

Bilan : une position d'équilibre existe si $\boxed{m > m'}$.

dans ce cas : $\boxed{\cos\left(\frac{\theta_{eq}}{2}\right) = \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}}$

Ex 1 Cuvette sphérique

Déposons à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale, une bille M de masse m, en un point M_0 d'une cuvette sphérique de centre O et de rayon r. Nous supposons que $\theta_0 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_0})$ est faible (M_0 est voisin de l'axe vertical descendant $\overrightarrow{Ox}$). La bille effectue un glissement (dont les frottements sont négligeables) dans le plan $x0y$. Etablir l'expression de $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$ en fonction de t (où $\vec{u}_r$ est unitaire suivant $\overrightarrow{OM}$).



Système = bille Π de masse m
Réf lié à la cuvette R supposé galiléen

Analyse : La trajectoire de la bille est circulaire (cercle d'axe $(O, \vec{u_z})$).
⇒ mvt à 1 degré de liberté.
↳ 1 éq. scalaire suffit à obtenir l'éq. diff du mvt.

Méthode : rotation autour d'un axe fixe, la réaction du support va être suivant $(O, \vec{u_r})$ ⇒ son moment est nul
⇒ on va appliquer le TMC par rapport à l'axe $(O, \vec{u_z})$

BAME : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$

ou
- $M_{Oz} = (\overrightarrow{O\Pi} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u_z}$ (calcul vectoriel)
- $M_{Oz} = \pm d \times P$

↳ bras de levier $d = r \sin\theta$

$$\boxed{M_{Oz} = -r\,mg\sin\theta}$$

On a bien $M_{Oz} = 0$ pour $\theta = 0$

Signe ⊖ : quand $\theta > 0$ (cas de la figure) : le poids a tendance à ramener la bille suivant la verticale
⇒ rotation dans le sens ⊖
le moment du poids suivant $\vec{u_z}$ est ⊖.

Réaction du support : On néglige les frottements, $\vec{R}$ orthogonale au déplacement ⇒ $\vec{R}$ suivant $\vec{u_r}$

$$\boxed{M_{Oz}(\vec{R}) = 0}$$

car • $\overrightarrow{O\Pi} \,//\, \vec{R}$
ou • la droite d'action de $\vec{R}$ passe par O.

Moment d'inertie de la bille : elle est assimilée à un point matériel

$$\boxed{J_{Oz} = m r^2}$$

On applique le TMC à la bille par rapport à l'axe (Oz) dans R supposé galiléen.

$$\left.\frac{dL_{Oz}}{dt}\right|_R = M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(\vec{R})$$

$$J_{Oz}\,\ddot{\theta} = -mgr\sin\theta$$

$$\cancel{m} r^{\cancel{2}}\,\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\cancel{r}\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0}$$

Eq diff du mvt. pas de terme en $\dot{\theta}$ (pas de frottement ni apport d'énergie).

signe ⊕ : on va obtenir des oscillations autour de la position d'éq stable $\theta = 0$.

Rq : On retrouve l'éq. diff classique qu'on aurait pu obtenir avec un PFD, un TEC / TEM / TPC.

ii $|\theta_0| \ll 1$: on linéarise l'éq. diff.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0}$$ Equa diff harmonique.

d'où $\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$

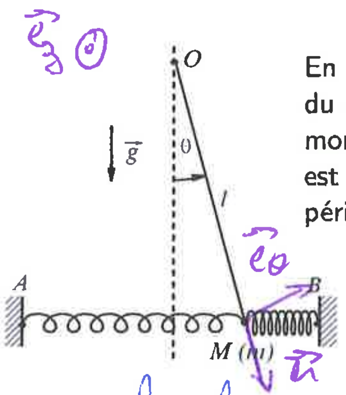
CI : $\theta(0) = \theta_0$
$\dot{\theta}(0) = 0$

$\theta(0) = \theta_0 = A$
$\dot{\theta}(t) = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$
$\dot{\theta}(0) = B\omega = 0$

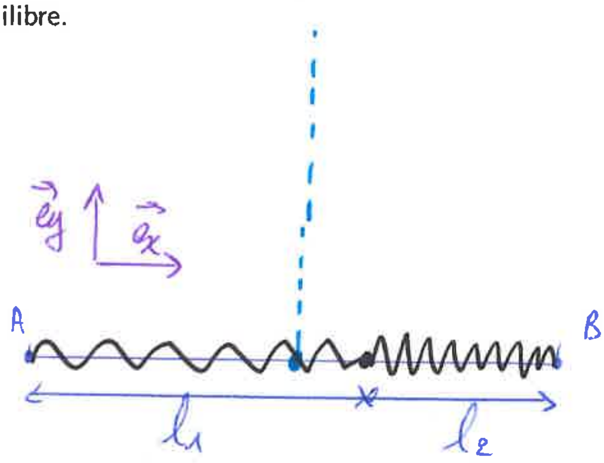
d'où $$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)}$$

Ex 4 Oscillateur à deux ressorts

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur ℓ rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité supérieure O. A l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. par ailleurs, ce point M est relié à deux ressorts identiques (k, ℓ_0) eux-mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est verticale. On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.



En appliquant le théorème du moment cinétique en O, montrer que le mouvement est harmonique. Calculer la période des oscillations.



On isole le point matériel Π de masse m.

Au 1er ordre, on considère que $\forall t$ $|\theta| \ll 1$ $\begin{cases} \cos\theta \simeq 1 \\ \sin\theta \simeq \theta \end{cases}$

ainsi, on va pouvoir considérer que Π se déplace horizontalement

BAME : • Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ $\quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mg\,l\sin\theta\,\vec{e_z}}$

• Ressort 1 : $\vec{F_1} = -k(l_1 - l_0)\,\vec{e_x}$

• Ressort 2 : $\vec{F_2} = +k(l_2 - l_0)\,\vec{e_x}$

$\vec{F_1} + \vec{F_2} = -k(l_1 - l_2)\,\vec{e_x}$

$l_1 = \frac{AB}{2} + l\sin\theta$

$l_2 = \frac{AB}{2} - l\sin\theta$

$l_1 - l_2 = 2l\sin\theta$

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -2kl\sin\theta\,\vec{e_x}$ $\qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = -2kl\sin\theta \times \underbrace{l\cos\theta}_{\text{bras de levier}}\,\vec{e_z}$

$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \simeq -2kl^2\sin\theta\,\vec{e_z}}$

• Action de la tige sur Π : suivant $(O\vec{e_r})$ $\Rightarrow$ son moment en O est nul.

On applique le TMC en O à M(m) dans le réf lié au bâti supposé galiléen

M est ponctuel : $\vec{L_O} = m\ell^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \sum \vec{M_O}(\vec{F_{ext}}) \qquad m\ell^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -mg\cancel{\ell}\sin\theta - 2k\ell^{\cancel{2}}\sin\theta$$

$$m\ell\ddot{\theta} + (mg + 2k\ell)\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)\sin\theta = 0$$

dans l'approximation des petits angles :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}}$$

d'où $$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}}}$$

Ex 6 Tige soudée à un plateau tournant

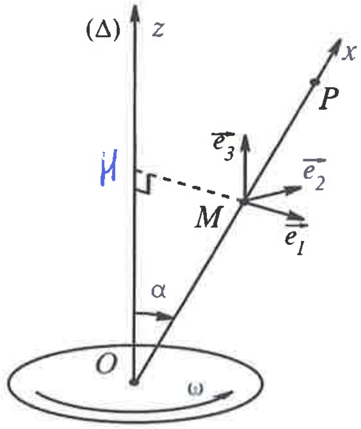
Une tige OP rigide est soudée à un plateau tournant à vitesse angulaire constante ω. Cette tige forme un angle constant α avec l'axe vertical $(Oz) = (\Delta)$).

Un point matériel de masse m pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

1. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen préciser la position x_e d'équilibre relatif. Donner ensuite les composantes R_1, R_2 et R_3 de la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ liée à la tige.

2. Ecrire le théorème du moment cinétique en H, puis en O. Vérifier ainsi les résultats précédents.

Π décrit un cercle de rayon HΠ et d'axe (Δ).



① Théorème du moment cinétique :

• $\vec{v}(\Pi) = H\Pi\,\omega\,\vec{e_2}$ et $H\Pi = \sin\alpha\; x_e$.

• $\vec{L_H} = \vec{H\Pi} \wedge m\vec{v} = mH\Pi^2\,\omega\,\vec{e_3} = m\sin^2\alpha\; x_e\omega\,\vec{e_3}$

• $\vec{L_O} = \vec{O\Pi} \wedge m\vec{v} = \vec{OH} \wedge m\vec{v} + \vec{L_H} = -OH \times m\sin\alpha\; x_e\omega\,\vec{e_1}$

$\vec{L_O} = -m x_e^2 \sin\alpha\cos\alpha\;\omega\,\vec{e_1}$ avec $OH = x_e\cos\alpha$.

BAME $\Rightarrow$ $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{\mathcal{M}_H}(\vec{P}) = +mg\,x_e\sin\alpha\;\vec{e_2}$

$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \underbrace{\cancel{\vec{OH}\wedge\vec{P}}}_{\vec{0}} + \vec{\mathcal{M}_H}(\vec{P}) = mg\,x_e\sin\alpha\;\vec{e_2}$

* Réaction du support : $\vec{R} = R_1\vec{e_1} + R_2\vec{e_2} + R_3\vec{e_3}$

$\vec{\mathcal{M}_H}(\vec{R}) = R_2\,x_e\sin\alpha\;\vec{e_3} - R_3\,x_e\sin\alpha\;\vec{e_2}$

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{R}) = \vec{OH}\wedge\vec{R} + \vec{\mathcal{M}_H}(\vec{R}) = (R_1 x_e\cos\alpha - R_3 x_e\sin\alpha)\,\vec{e_2} - R_2 x_e\cos\alpha\;\vec{e_1} + R_2 x_e\sin\alpha\;\vec{e_3}$$

TMC en H au point matériel M dans Rlabo galiléen :

$$\left.\frac{d\vec{L}_H}{dt}\right) = mg\, x_e \sin\alpha\, \vec{e}_2 + R_2\, x_e \sin\alpha\, \vec{e}_3 - R_3\, x_e \sin\alpha\, \vec{e}_2$$

$$\vec{0}$$

d'où
$$\begin{cases} R_2 = 0 \\ mg\, x_e \sin\alpha - R_3\, x_e \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{R_2 = 0} \qquad \boxed{R_3 = mg}$$

TMC en O au point matériel M dans Rlabo galiléen :

$$\left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right|_R = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R})$$

$$\left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right|_R = -m x_e^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \omega^2 \vec{e}_2 \qquad \left(\text{on a } \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \omega \vec{e}_2\right)$$

d'où
$$\begin{cases} -m x_e^{\cancel{2}} \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = mg \cancel{x_e} \sin\alpha + \cancel{x_e}(R_1\cos\alpha - R_3 \sin\alpha) \\ 0 = -R_2 x_e \cos\alpha \\ 0 = R_2 x_e \sin\alpha \end{cases}$$

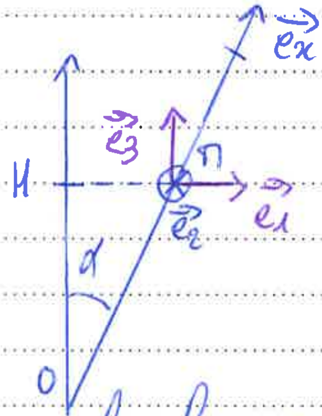
de plus $R_3 = mg \Rightarrow -m x_e \omega^2 \sin\alpha \cancel{\cos\alpha} = R_1 \cancel{\cos\alpha}$

$$\boxed{R_1 = -m\, \omega^2 x_e \sin\alpha}$$

Expression de x_e

Le mouvement est sans frottement donc $\vec{R} \cdot \vec{e_x} = 0$

$$R_1 \underbrace{\vec{e_1} \cdot \vec{e_x}}_{\sin\alpha} + \underbrace{\cancel{R_2}}_{0} \underbrace{\vec{e_2} \cdot \vec{e_x}}_{0} + R_3 \underbrace{\vec{e_3} \cdot \vec{e_x}}_{\cos\alpha} = 0$$



$$R_1 \sin\alpha + R_3 \cos\alpha = 0$$

$$-\cancel{m}\omega^2 x_e \sin^2\alpha + \cancel{m}g\cos\alpha = 0$$

dans le plan $OH\Pi$.

$$\boxed{x_e = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}}$$

On reporte dans R_1 :

$$R_1 = -\frac{mg}{\tan\alpha}$$

$$R_2 = 0$$

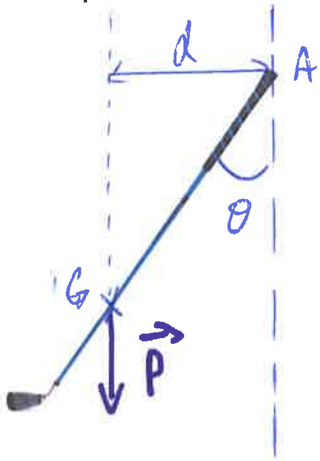
$$R_3 = mg$$

On peut vérifier ou retrouver ces résultats en appliquant le PFD.

RP 1 Club de golf

Un club de golf peut être modélisé en 2 parties : le manche et la tête de club qui sont liées entre elles. Le joueur tient le club avec ses mains à l'extrémité du manche, et la tête de club fixée à l'autre extrémité doit venir frapper la balle.

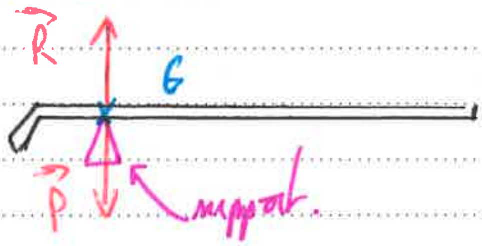
Proposer une méthode permettant de déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un club de golf et son moment d'inertie



∘ Détermination de G

On modélise le manche par une tige sans épaisseur.

⇒ On cherche pour quelle position le club peut être horizontal en équilibre =



Dans cette position la somme des forces extérieures est nulle et le moment au point de contact des forces est est nul

⇒ équilibre.

∘ Détermination de J_A

On note $AG = l$. On accroche le club en A et on mesure la période des petites oscillations.

$$\text{TMC} = J_A \ddot{\theta} = -mg\sin\theta \times l$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_A}\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \qquad T_0 = \frac{2\pi\sqrt{J_A}}{\sqrt{mgl}}$$

$$\boxed{J_A = \frac{T_0^2}{4\pi^2} mgl}$$

Ex 5 Volant d'inertie

On s'intéresser à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé, qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS ("Finetic Energy Recovering System"). On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie J (par rapport à son axe de rotation) soumis à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottement fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1. Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.

2. Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale ω_f et un temps caractéristique τ.

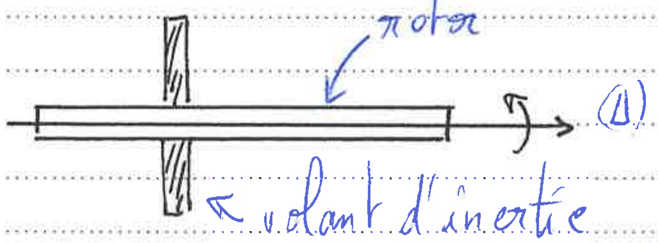
3. Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor que l'on prendra harmonique $\Gamma_{vib}(t) = \gamma\cos(\Omega t)$. Pourquoi ne perd-on pas en généralité en considérant ce couple harmonique ? Après un régime transitoire, la vitesse angulaire du rotor est elle-aussi harmonique de pulsation Ω. Donner le temps caractéristique de la durée du transitoire.

4. Après la fin du transitoire, on cherche la vitesse angulaire de rotation ω sous la forme

$$\omega(t) = \omega_f + A\cos(\omega t + \varphi)$$

Déterminer l'amplitude A. Il est recommandé de réécrire l'équation différentielle en termes $\delta\omega = \omega - \omega_f$ et d'utiliser la notation complexe.

5. En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.



① Puissance du couple de frottement

$P_f = \Gamma_f \cdot \omega = -\alpha\omega^2 < 0$ (ce couple de frottement fait diminuer l'énergie du système)

$\boxed{\alpha > 0}$

② Equation différentielle et évolution $\omega(t)$

- Système S {rotor + volant d'inertie} moment d'inertie J.
- Réf du labo supposé galiléen.
- Actions mécaniques : → couple moteur Γ_0
  → couple frottement Γ_f

Le moment du poids est nul par rapport à l'axe de rotation (système équilibré).

Liaison pivot parfaite $\mathcal{M}_\Delta(\text{pivot}) = 0$.

On applique le TMC au solide S dans Rlabo galiléen par rapport à l'axe de rotation (Δ)

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 + \Gamma f \qquad J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - \alpha \omega$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} + \frac{\alpha}{J} \omega = \frac{\Gamma_0}{J}}$$ éq diff linéaire du 1er ordre.

$$\tau = \frac{J}{\alpha}$$

$$\underbrace{\omega_P = \frac{\Gamma_0}{\alpha}}_{\text{vitesse angulaire en régime permanent.}} \quad \text{et} \quad \omega_H = \Omega e^{-t/\tau} \qquad \omega(t) = \frac{\Gamma_0}{\alpha} + \Omega e^{-t/\tau}$$

CI : $\omega(0) = 0$

$$\boxed{\omega(t) = \underbrace{\frac{\Gamma_0}{\alpha}}_{\omega f}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

3 Régime harmonique

On peut modéliser les vibrations par un phénomène périodique décomposable en série de Fourier.
De plus, l'éq. diff est linéaire : on peut donc reconstruire la réponse aux vibrations comme une somme des réponses à des vibrations sinusoïdales.

Le régime transitoire est toujours caractérisé par l'éq. diff (et sa solution homogène). Les vibrations viennent modifier le 2nd membre

Temps carac. du régime transitoire $\boxed{\tau = \frac{J}{\alpha}}$

4 Amplitude A : On ajoute une excitation $\Gamma_{vib}(t)$

L'équa diff se réécrit : $\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\omega = \underbrace{\frac{\Gamma_0}{J}}_{\omega f} + \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)$

On pose $\omega = \omega f + A\cos(\Omega t)$

et $\delta\omega = \omega - \omega f \qquad \omega = \omega f + \delta\omega$

$$\frac{d\,\delta\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\,\delta\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\delta\omega = \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)}$$

↳ on cherche la solution en régime permanent (représentation complexe).

On pose $\underline{\delta\omega} = A\, e^{j\Omega t + j\varphi} = \underline{A}\, e^{j\Omega t}$

$$j\Omega \underline{A} + \frac{1}{\tau}\underline{A} = \frac{\gamma}{J} \qquad \boxed{\underline{A} = \frac{\tau\gamma/J}{1 + j\tau\Omega}}$$

$$\boxed{A = |\underline{A}| = \frac{\tau\gamma/J}{\sqrt{1+(\tau\Omega)^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + J^2\Omega^2}}}$$ (Effet passe-bas)

(5) Volant d'inertie

Quand on ajoute un volant d'inertie, on augmente J
ainsi A, l'amplitude des oscillations diminue : l'amplitude
des variations de la vitesse angulaire diminue.
⇒ le volant d'inertie stabilise la vitesse.

Par contre $\tau = \frac{J}{\alpha}$ si $J \nearrow$ alors $\tau \nearrow$

La durée du régime transitoire augmente.