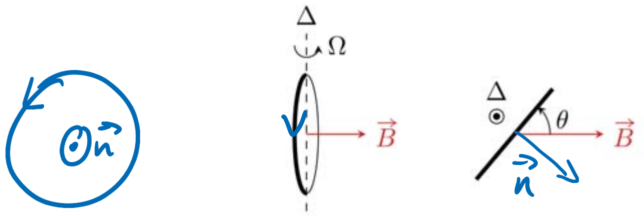
Ex 1 Spire en rotation

On considère une spire conductrice circulaire de surface S et de résistance électrique r. Cette spire est mise en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ constante autour d'un de ses diamètres, qui définit l'axe Δ. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}$ orthogonal à Δ.



1. Etablir l'expression de la fém induite dans la spire. En déduire celle du courant induit dans la spire.

2. Déterminer le moment magnétique instantané de la spire.

3. En déduire le couple de Laplace instantané puis moyen qui s'exerce sur la spire. Quel est qualitativement son effet sur le mouvement de la spire ? Aurait-on pu le prévoir sans calcul ?

1) Tension électromotrice induite :

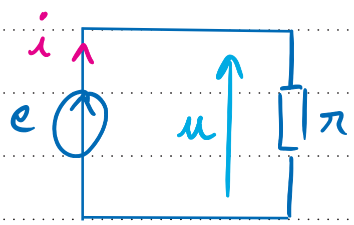
$\vec{B}$ uniforme

$$\phi = \iint_{S/\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \vec{B} \cdot \vec{S} \qquad \phi = BS \sin(\theta)$$

avec $\theta = \Omega t$ $\qquad \phi = BS \sin(\Omega t)$

Loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ $\qquad \boxed{e = -\Omega BS \cos(\Omega t)}$

Circuit électrique équivalent :



$u = ri$ (CR)

$i = \dfrac{e}{r}$ $\qquad \boxed{i = -\dfrac{\Omega BS}{r} \cos(\Omega t)}$

Rq : on néglige l'induction propre.

② Moment magnétique instantané :

par définition : $\vec{m} = i\vec{S}$ $\qquad\qquad$ $\vec{m} = iS\vec{n}$

normale à la surface.

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{\Omega B S^2}{R}\cos(\Omega t)\,\vec{n}}$$

dépend du temps.

③ Couple de Laplace :

$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ $\qquad\qquad$ $\vec{\Gamma} = -\frac{\Omega B S^2}{R}\cos(\Omega t)\underbrace{\vec{n}\wedge\vec{B}}_{B\cos(\Omega t)\,\vec{e}_\Delta}$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = -\frac{\Omega B^2 S^2}{R}\cos^2(\Omega t)\,\vec{e}_\Delta}$$

$$\boxed{\langle\vec{\Gamma}\rangle = -\frac{\Omega B^2 S^2}{2R}\,\vec{e}_\Delta}$$ $\qquad$ avec $\langle\cos^2\Omega t\rangle = \frac{1}{2}$

La composante sur Δ du couple est toujours opposée à la vitesse de rotation.
Le couple tend à freiner la spire.

C'est en accord avec la loi de modération de Lenz :

$\Rightarrow$ le couple induit tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

Rq : on peut commencer l'étude par cette analyse.

Spire en rotation $\xrightarrow[\text{Lorentz}]{\text{loi de Faraday} \;/\; \text{Induction de}}$ Courant induit

Courant induit $\longrightarrow$ Spire en rotation : Couple de Laplace, loi de Lenz

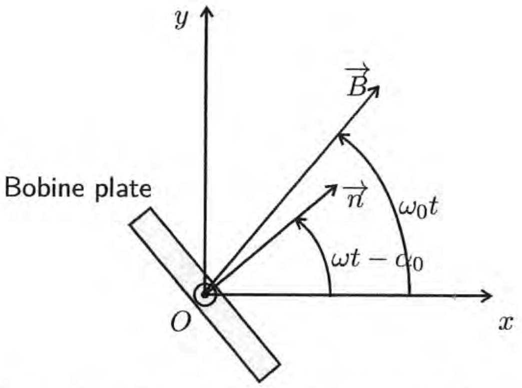
Ex 3 Moteur asynchrone

Une bobine plate de centre O formée de N spires de section S d'inductance propre L et de résistance r tourne à la vitesse angulaire constante $\omega > 0$ autour de l'axe Oz. Sa position est repérée par l'angle entre $\vec{u}_x$ et le vecteur $\vec{n}$ normal au plan de la bobine :

$$(\vec{u}_x, \vec{n}) = \omega t - \alpha_0$$

où α_0 est une constante positive.

Cette bobine est plongée dans un champ magnétique de norme B constante tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire $\omega_0 > 0$ constante : $(\vec{u}_x, \vec{B}) = \omega_0 t$.



1. Déterminer la valeur à l'instant t de l'angle $\alpha(t) = (\vec{n}, \vec{B})$. En déduire le flux $\phi(t)$ du champ $\vec{B}$ à travers la bobine. Quelle est la force électromotrice induite ?

2. En régime établi cette fem engendre dans le circuit (r, L) un courant sinusoïdal $i(t)$ de même pulsation que e qu'on exprimera sous la forme $i(t) = I \sin(\alpha(t) - \varphi)$ où φ est une constante. Exprimer I et $\tan(\varphi)$ en fonction de $\phi_0 = NBS$, r, L, ω et ω_0.

3. A quel couple $\vec{\Gamma} = \Gamma.\vec{u}_z$ le circuit est-il soumis ? Quelle est sa valeur moyenne Γ_m en fonction de I, S, B et φ ?

4. A quelle condition sur φ le couple est-il moteur ?

5. Tracer l'allure de Γ_m en fonction de la pulsation ω. Dans quel domaine de pulsation le dispositif fonctionnera-t-il en moteur ? On justifiera l'appellation de moteur asynchrone.

6. Un tel moteur peut-il démarrer seul ?

7. On suppose que le moteur a à vaincre un couple résistant de norme constante Γ_r. Etudier la stabilité du fonctionnement.

① Angle $\alpha(t)$: $\alpha(t) = \omega_0 t - (\omega t - \alpha_0)$ $\boxed{\alpha = (\omega_0 - \omega)t + \alpha_0}$

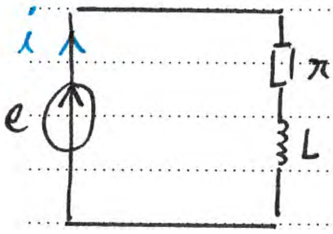
$\phi_S = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = BS\cos(\alpha(t))$ ϕ_S = flux par spire

d'où $\boxed{\phi = N\phi_S = NBS\cos((\omega_0 - \omega)t + \alpha_0)}$

fém induite : on applique la loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$

$\boxed{e = NBS(\omega_0 - \omega)\sin((\omega_0 - \omega)t + \alpha_0)}$

② <u>Courant induit</u> Loi des mailles : $e = ri + L\dfrac{di}{dt}$



On se place en RSF (pulsation $(\omega_0 - \omega)$).

$e = \mathrm{Re}(\underline{e})$ avec $\underline{e} = -jBNS(\omega_0-\omega)\,e^{j((\omega_0-\omega)t+\alpha_0)}$

$$\underline{i}\,(r + jL(\omega_0-\omega)) = -jNBS(\omega_0-\omega)\,\underbrace{e^{j\alpha_0}\,e^{j(\omega_0-\omega_0)t}}_{e^{j\alpha(t)}}$$

$$\underline{i} = \frac{\Phi_0(\omega_0-\omega)}{r+jL(\omega_0-\omega)} \times \left(-j\,e^{j\alpha(t)}\right) \quad \text{avec } i(t) = \mathrm{Re}(\underline{i}(t))$$

et $\underline{i}(t) = -jI\,e^{+j(\alpha(t)-\varphi)}$.

$$\boxed{I e^{-j\varphi} = \frac{\Phi_0(\omega_0-\omega)}{r+jL(\omega_0-\omega)}} \quad (*)$$

① $\underline{\omega_0 > \omega}$ $\quad I = \dfrac{\Phi_0(\omega_0-\omega)}{\sqrt{r^2+L^2(\omega_0-\omega)^2}}$ et $\tan\varphi = \dfrac{L(\omega_0-\omega)}{r}$

② $\underline{\omega_0 < \omega}$ $\quad I = \dfrac{\Phi_0(\omega-\omega_0)}{\sqrt{r^2+L^2(\omega_0-\omega)^2}}$ et $\tan\varphi = \dfrac{L(\omega_0-\omega)}{r}$

Remarque : la partie réelle du dénominateur ne change pas de signe d'où $\tan\varphi$ et $\sin\varphi$ de mêmes signes

③ <u>Couple</u> = circuit dans un champ magnétique uniforme

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i(t)NS\,\vec{n}\wedge\vec{B} = i(t)NBS\sin(\alpha(t))\,\vec{u_z}$$

Valeur moyenne : $\Gamma_m = \langle INBS\,\underbrace{\sin(\alpha(t)-\varphi)}_{\text{à développer.}}\sin(\alpha(t))\rangle$

$$\Gamma_m = INBS \times \frac{1}{2}\cos\varphi$$

$$\boxed{\Gamma_m = \frac{I\Phi_0}{2}\cos\varphi}$$

④ Couple moteur : le rotor tourne dans le sens ⊕

le couple est moteur s'il est exercé dans le sens de la rotation.

$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u_z} > 0 \qquad \Gamma_m > 0 \qquad \boxed{\cos\varphi > 0}$

⑤ pour tracer $\Gamma_m(\omega)$ il faut exprimer $\cos\varphi$.

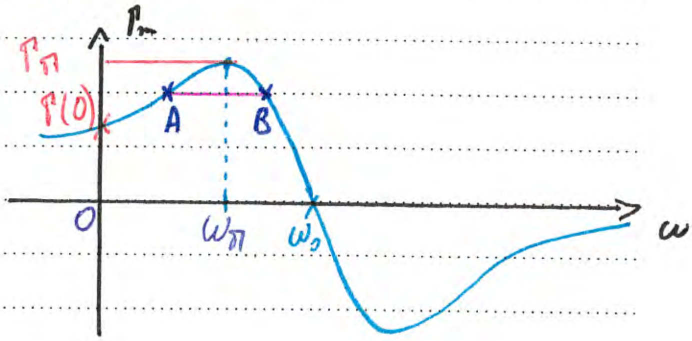
$$\frac{1}{I} e^{j\varphi} = \frac{1}{\Phi_0} \times \left(\frac{r}{\omega_0 - \omega} + jL \right)$$

$$e^{j\varphi} = \frac{I}{\Phi_0} \left(\frac{r}{\omega_0 - \omega} + jL \right) = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

identification : $\cos\varphi = \dfrac{I}{\Phi_0} \times \dfrac{r}{\omega_0 - \omega}$

$$\Gamma_m = I^2 \frac{r}{2(\omega_0 - \omega)}$$

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} \times \frac{\Phi_0^2 \, r \, (\omega_0 - \omega)}{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}$$



- fonctionnement moteur $\Gamma_m > 0 \iff \omega < \omega_0$
- quand $\omega_0 = \omega_0$, $\Gamma_m = 0$. Pour que le moteur fonctionne son couple doit être non nul, sa vitesse doit être différente de la vitesse de synchronisme.

⑥ Démarrage : $\Gamma_m(0) > 0$: le moteur peut démarrer si $\Gamma_m = C_r$.

⑦ En régime permanent $\Gamma_m - \Gamma_r = 0$ 2 points A et B.
A : si la vitesse diminue alors Γ_m diminue $\quad J\dot{\omega} = \Gamma_m - \Gamma_r$
instable.
B : vitesse diminue, $\Gamma_m \nearrow$, la vitesse de rotation tend à augmenter.
$\Rightarrow$ stable. pour $\omega_{\Pi} \leq \omega \leq \omega_0$.

Ex 4 Pendule conducteur

Une tige métallique homogène OA de masse m et de longueur ℓ peut tourner autour d'un axe horizontal Oz. La liaison pivot de son extrémité O est parfaite. L'extrémité mobile A glisse sans frottement sur un profil circulaire de sorte qu'à chaque instant l'ensemble {tige,profil} assure la fermeture d'un circuit électrique constitué d'une bobine d'inductance propre L. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B.\vec{e_z}$. On négligera la résistance du circuit. On note J le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation $(O, \vec{e_z})$

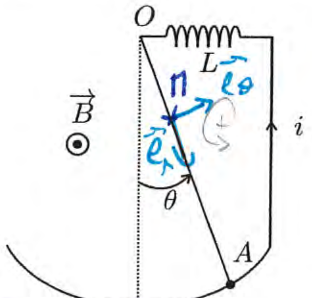
1. Calculer le moment résultant Γ_{Lap} des forces de laplace en fonction de $i(t)$, B et ℓ.

2. Exprimer la force électromotrice induite $e(t)$ en fonction de $\omega(t)$, B et ℓ.

3. Déduire une relation explicite de l'intensité en fonction de $\theta(t)$, B, ℓ, L et θ_0 l'angle que fait le pendule à l'instant initial.

4. Montrer que la tige effectue un mouvement oscillant caractérisé par une pulsation ω_0 à déterminer en fonction de m, g, B, ℓ, L et le moment d'inertie J de la tige. On fera l'approximation linéaire des petits angles.

5. Montrer que ces oscillations ont lieu autour d'une position moyenne θ^* à exprimer en fonction de θ_0, ω_0, B, ℓ, L et J.



$\odot \vec{e_z}$

⚠ Calcul par le couple élémentaire.

① Moment résultant

Circuit mobile dans une zone où règne $\vec{B}$ ⇒ apparition d'une fem induite et de courants induits.

Force de Laplace + moment résultant qui s'oppose au mouvement.

$d\vec{F_L} = i\, \vec{dl} \wedge \vec{B}$ $\qquad d\vec{\Gamma}_{Lap} = \vec{OM} \wedge d\vec{F_L}$

$d\vec{F_L} = -i\, dr\, B\, \vec{e_\theta}$ $\qquad d\vec{\Gamma}_{Lap} = -iBr\, dr\, \vec{e_z}$ $\qquad \boxed{\vec{\Gamma}_{Lap} = -iB\frac{\ell^2}{2}\vec{e_z}}$

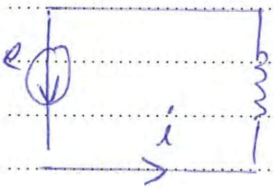
② Fem induite : ici le flux est variable, mais expression difficile à établir.

Bilan de puissance : $P_{Lap} + P_e = 0$ (conversion parfaite).

$\vec{\Gamma}_{Lap} \cdot \vec{\Omega} + e\,i = 0$

d'où $\boxed{e = \frac{B\ell^2}{2}\Omega}$

③ Equation électrique =



$$e = L\frac{di}{dt} \qquad \frac{Bl^2}{2}\Omega = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{Bl^2}{2L}\frac{d\theta}{dt} \qquad i(t) - \underbrace{i(0)}_{=0} = \frac{Bl^2}{2L}\left(\theta(t) - \theta_0\right)$$

$$\boxed{i(t) = \frac{Bl^2}{2L}\left(\theta(t) - \theta_0\right)}$$

④ Pendule = mvt de rotation autour de l'axe O.
=> on va appliquer le TMC.

× Moment du poids : $\vec{M}(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = -mg\frac{l}{2}\vec{e_z} \times \sin\theta$.
(↳ bras de levier + signe).

$$J\ddot{\theta} = -mg\frac{l}{2}\underbrace{\sin\theta}_{\theta} - i(t)B\frac{l^2}{2}$$

$$J\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\theta + \left(\frac{Bl^2}{2}\right)^2\frac{1}{L}\times\theta(t) = \left(\frac{Bl^2}{2}\right)^2\frac{1}{L}\theta_0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{(Bl^2)^2}{4JL}\theta_0 \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{2J} + \left(\frac{Bl^2}{2}\right)^2\frac{1}{LJ}}}$$

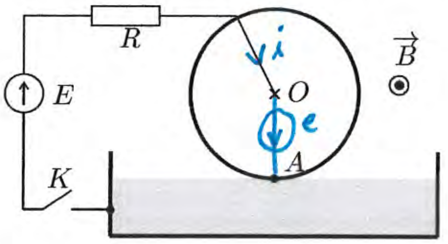
↳ Eq. diff harmonique (dans l'approx. des petits angles).

oscillation autour de la position d'éq. (solution particulière constante).

$$\boxed{\theta^* = \frac{1}{\omega_0^2}\times\frac{(Bl^2)^2}{4JL}\theta_0}$$

Ex 5 Roue de Barlow

Une roue de Barlow de rayon a est placée dans le champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B_0.\overrightarrow{u_z}$. Elle fait partie d'un circuit comprenant une résistance R, un générateur de fém E et un interrupteur. Le circuit est fermé au bas de la roue par un bain de mercure. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Interpréter les phénomènes ayant lieu. Dans quel sens va tourner la roue ? Commenter la loi de Lenz.

2. Equation mécanique : on note $\overrightarrow{\omega} = \omega.\overrightarrow{u_z}$ la vitesse angulaire de la roue. On suppose qu'un courant i part de son centre O pour atteindre l'extrémité A.

2.1. En considérant que le courant passe seulement en ligne droite, calculer le moment projeté sur l'axe de rotation de la force de Laplace.

2.2. Etablir l'équation mécanique. On note J le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe. On supposera que la liaison pivot est parfaite.

3. Calculer la fém d'induction.

4. En déduire l'équation électrique du système.

5. Résoudre les équations.

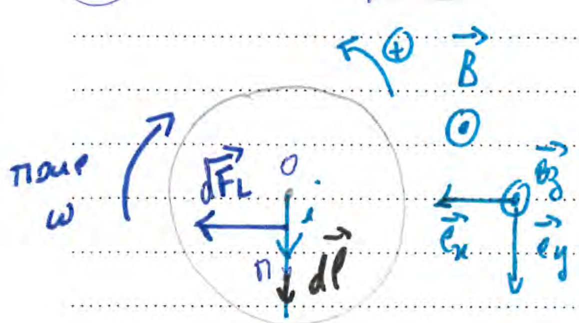
(1) On ferme l'interrupteur. Un courant s'établit. La roue (qui a un degré de liberté) est parcourue par le courant. Elle est plongée dans un champ $\vec{B}$ => Apparition d'une force de Laplace qui la met en rotation.

=> Conducteur en mouvement plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ (induction de Lorentz) => apparition d'une fém induite.

$$\boxed{\text{Courant dans le circuit (plongé ds } \vec{B})} \xrightarrow{\text{Force de Laplace}} \boxed{\text{Rotation de la roue}}$$

Induction de Lorentz
+ Loi de modération de Lenz.

(2.1) Force de Laplace



On choisit un repère tel que $\vec{B} = B\vec{z}$ (on aurait pu choisir un repère pour privilégier $\omega > 0$).

Loi de Laplace : $d\vec{F} = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$

$d\vec{F} = +i\,dl\,B\,\vec{e_x}$

Force vers la gauche => rotation ($\omega < 0$)

* Couple élémentaire : $d\vec{\Gamma} = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L$ ⚠ calcul direct faux, la distance à l'axe varie.

$d\vec{\Gamma} = -liB\,dl\,\vec{e}_z$ où $OM = l$

$\vec{\Gamma} = \int_0^R -iB\,l\,dl\,\vec{e}_z$ $\boxed{\vec{\Gamma} = -i\frac{Ba^2}{2}\vec{e}_z}$ On retrouve $\vec{\Gamma}$ suivant $-\vec{e}_z$, $\omega < 0$

2) Equation mécanique

TMC dans Rlabo supposé galiléen. Frottements négligés. projection/$\vec{e}_z$.

$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma$ $\boxed{J\frac{d\omega}{dt} = -i\frac{Ba^2}{2}}$ (M)

→ couplage électromécanique
i dépend du temps (et/ou de ω).

3) Fém d'induction

on ne peut pas appliquer la loi de Faraday (pb : on ne sait/peut pas exprimer Φ).

⇒ Bilan de puissance en supposant la conversion parfaite.

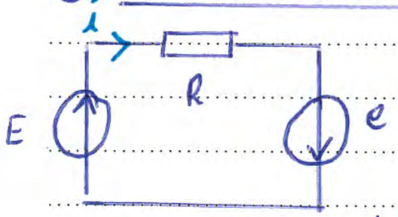
$P_{Lap} + P_e = 0$ $\vec{\Gamma}\cdot\omega\vec{e}_z + ei = 0$ $-i\frac{Ba^2}{2}\omega + ei = 0$

d'où $\boxed{e = \frac{Ba^2}{2}\omega}$ ici $\omega < 0$ donc $e < 0$
on retrouve la loi de modération de Lenz : e s'oppose à E.

4) Loi des mailles

$E = Ri - e$

$E = Ri - \frac{B^2}{2}\omega$ d'où $\boxed{i = \frac{E}{R} + \frac{Ba^2}{2R}\omega}$



5) on reporte dans (M) : $\frac{d\omega}{dt} + \frac{(Ba^2)^2}{4RJ}\omega = \frac{-E}{RJ}\times\frac{Ba^2}{2}$

on pose $\tau = \frac{4RJ}{B_0^2a^4}$ et $\frac{-Ba^2E}{2RJ} = \frac{\omega_0}{\tau}$ d'où $\omega_0 = \frac{-2E}{B_0a^2}$

$\boxed{\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\omega_0}{\tau}}$

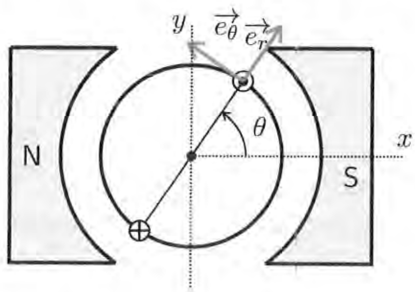
$\omega(0) = 0 \Rightarrow \omega(t) = \omega_0(1 - e^{-t/\tau})$

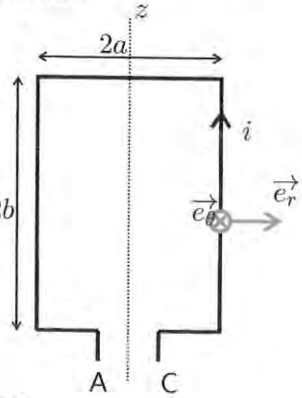
La roue se met à tourner dans le sens < 0 ($\omega_0 < 0$). La fem e (< 0) s'oppose au générateur E.
Au bout de quelques τ $e = -E$, $i \to 0$ et la roue tourne à vitesse constante (frottements négligés).

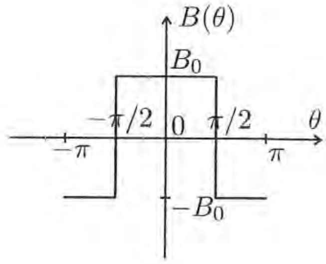
Ex 6 Moteur à courant continu

Une spire rectangulaire de grand axe zz' est enroulée sur un cylindre de même axe de rayon a et de hauteur b. Cet ensemble constitue le rotor d'une machine (moteur ou génératrice). Ce rotor se déplace dans l'entrefer d'un aimant. Le champ magnétique créé par cet aimant a une composante radiale B_r au niveau de l'entrefer dont la variation est représentée en fonction de l'angle θ. On suppose l'autre composante du champ magnétique nulle.

La spire a une résistance R et est connectée vers l'extérieur par l'intermédiaire de deux points A et C par un système balai-collecteur de manière que le brin de spire situé à droite de l'axe y soit toujours en contact électrique avec A et que celui à gauche de l'axe y soit toujours en contact avec C (quelle que soit la position θ de cette spire). On notera J le moment d'inertie par rapport à l'axe zz' du rotor et $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_z}$ son vecteur rotation. On négligera les phénomènes d'auto-induction dans la spire. On notera $i(t)$ le courant traversant la spire orientée de A vers C.







Lors de la rotation la spire est soumise à un couple de frottement fluide dont le moment est du type $\overrightarrow{\Gamma_f} = -\beta\overrightarrow{\Omega}$ où β est une constante positive.

Partie n°1: Etude générale

1. Montrer que le moment $\overrightarrow{\Gamma_{Lap}}$ par rapport à l'axe de rotation des forces électromagnétiques s'exerçant sur le rotor peut s'écrire

$$\overrightarrow{\Gamma_{Lap}} = \phi_0.i(t)\overrightarrow{e_z}$$

où ϕ_0 est une grandeur à exprimer en fonction de B_0, a et b.

2. Montrer que la force électromotrice $e(t)$ induite par le mouvement du rotor dans le champ magnétique peut s'écrire

$$e(t) = -\phi_0\Omega(t).$$

Partie n°2: Principe d'une dynamo

3. On connecte entre A et C une résistance R' et on entraîne la spire par un moteur tournant à vitesse angulaire Ω supposée constante. Déterminer le courant $i(t)$. Ce courant est-il continu ou variable ?

4. Quel couple Γ_{meca} doit délivrer le moteur pour maintenir une vitesse de rotation constante ?

Partie n°3: Principe d'un moteur à courant continu

On enlève la résistance R' et on impose entre A et C à l'aide d'un générateur une tension constante $V_A - V_C = E > 0$. Un couple résistant $\overrightarrow{\Gamma_r} = -\Gamma_r\overrightarrow{e_z}$ est appliqué à la spire ($\Gamma > 0$) en plus du couple de frottement (c'est l'opposé du couple que le rotor exerce sur l'objet qu'il doit mettre en rotation).

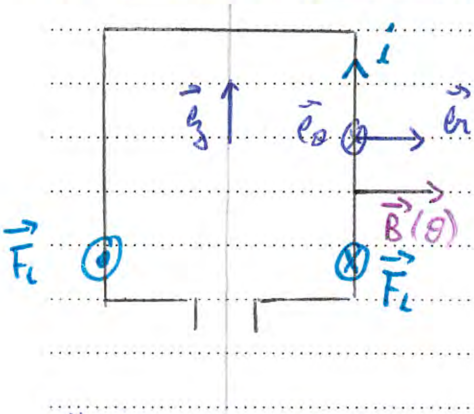
5. En appliquant les lois de la mécanique établir l'équation différentielle reliant β, Ω, J, i, ϕ_0 et Γ_r.

6. Etablir l'équation électrique du système reliant E, i, a, b, R, ω et B_0.

7. En déduire l'évolution de Γ au cours du temps en supposant qu'à $t = 0$ la spire est immobile. Tracer la courbe et donner $\Omega(t)$ en fonction du temps. On pourra poser pour simplifier :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{J}\left(\beta + \frac{4a^2b^2B_0^2}{R}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\Omega_0}{\tau} = \frac{1}{J}\left(\frac{2abB_0E}{R} - \Gamma_r\right)$$

① Force et couple de Laplace



→ force élémentaire sur le brin de droite :

$\overrightarrow{dF_L} = i\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$

Rôle balais-collecteur :

- $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ le courant est toujours suivant $\vec{e_z}$ et $B(\theta) = +B_0$.

d'où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\overrightarrow{dF_L} = i\,dl\,B_0\,\vec{e_\theta}$

- $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$: le courant est suivant $-\vec{e_z}$ et $\vec{B}(\theta) = -B_0\,\vec{e_r}$

d'où $\overrightarrow{dF_L} = i\,dl\,B_0\,\vec{e_\theta}$

En intégrant, on obtient sur chaque brin : $\vec{F_L} = i \times 2b\,B_0\,\vec{e_\theta}$

Les brins sont parallèles à l'axe : on peut calculer le couple directement à partir de la force de Laplace (sans passer par le moment élémentaire).

$\vec{\Gamma} = a\,\vec{e_r} \wedge \vec{F_L} = 2ab\,i\,B_0\,\vec{e_z}$ (ou bras de levier + sens).

↳ couple sur chaque brin

Couple total : il y a 2 brins : $\vec{\Gamma}_{Lap} = 4ab\,i\,B_0\,\vec{e_z}$

d'où $\boxed{\vec{\Gamma}_{Lap} = \Phi_0\,i\,\vec{e_z}}$ avec $\Phi_0 = 4abB_0$ Homogène à un flux

si on place N spires autour du rotor, on aura $\Phi_0 = N4abB_0$

② Force électromotrice

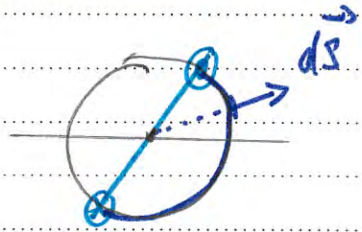
2 méthodes : $\Rightarrow$ Bilan de puissance : ici la plus simple
$\Rightarrow$ calcul du flux : ici, c'est plus compliqué car on ne connait $\vec{B}$ que dans l'entrefer.

* Méthode ① : on suppose que la conversion électro-mécanique est parfaite :

$$P_{Lap} + P_e = 0 \qquad \vec{\Gamma}_{Lap} \cdot \vec{\Omega} + e\,i = 0.$$

d'où $\Phi_0 i \Omega + e i = 0$ $\quad \boxed{e = -\Phi_0 \Omega(t)}$

* Méthode ② : Calcul du flux à travers la spire + loi de Faraday.



* on ne connait le champ que dans l'entrefer.
* Conservation du flux de $\vec{B}$
$\Rightarrow$ on peut calculer le flux à travers n'importe quelle surface qui s'appuie sur la spire.

on choisit le demi-cylindre de rayon a de hauteur b orienté dans le sens ⊕ (du courant).

Élément de surface : $d\vec{S} = 2b \times a\,d\theta\, \vec{e_r}$

d'où $\Phi(t) = \iint \vec{B}(\theta) \cdot d\vec{S} = \int_{\theta(t)-\pi}^{\theta(t)} 2ab\,B(\theta)\,d\theta$

$$\Phi(t) = \underbrace{\int_{\theta-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -2ab\,B_0\,d\theta}_{\vec{B} = -B_0 \vec{e_r}} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} 2ab\,B_0\,d\theta}_{\vec{B} = B_0 \vec{e_r}} = -2ab\,B_0\left[-\frac{\pi}{2} - (\theta - \pi)\right] + 2ab\,B_0\left[\theta - \frac{\pi}{2}\right]$$

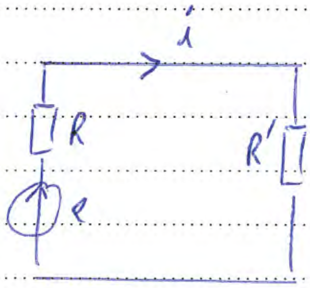
$$\Phi(t) = 2ab\,B_0\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \pi + \theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2ab\,B_0\,(2\theta - \pi)$$

loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ $\quad \boxed{e = -4ab\,B_0\,\dot{\theta}} \quad \dot{\theta} = \Omega(t)$

$$\boxed{e = -\Phi_0\,\Omega(t)}$$

Partie 2 : Dynamo

③ Schéma équivalent de l'induit



Loi des mailles : $e = (R+R')\,i$

$i = \dfrac{e}{R+R'}$ et $e = -\Phi_0\Omega$

$$\boxed{i = \frac{-\Phi_0}{R+R'}\,\Omega}$$

Le cadre (ou rotor) tourne à vitesse constante $\Rightarrow$ $i = \text{cste}$.

$\Rightarrow$ la dynamo permet de délivrer un courant continu.

④ Couple Γ_{meca} TMC : $J\dfrac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{Lap} + \Gamma_f + \Gamma_{meca}$

$\Omega = \text{cste}$ et $\Gamma_f = -\beta\Omega$ (projection sur $\vec{e_z}$). d'où $0 = \Gamma_{Lap} - \beta\Omega + \Gamma_{meca}$.

$\Gamma_{Lap} = \Phi_0 i = \dfrac{-\Phi_0^2}{R+R'}\,\Omega$

$$\boxed{\Gamma_{meca} = \left(\beta + \frac{\Phi_0^2}{R+R'}\right)\Omega}$$

Puissance que le couple extérieur fournit au rotor :

$P_{méca} = \vec{\Gamma}_{meca}\cdot\vec{\Omega} = \left(\beta + \dfrac{\Phi_0^2}{R+R'}\right)\Omega^2 > 0$ $\forall$ le signe de Ω

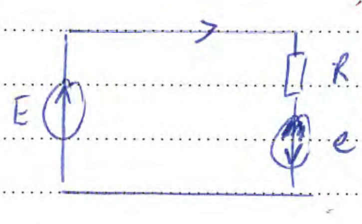
$\Rightarrow$ il faut fournir de l'énergie à la dynamo pour qu'elle puisse assurer la conversion énergie méca $\rightarrow$ énergie élec.

Partie 3 : Principe d'un MCC

⑤ TMC : $J\dfrac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{Lap} + \Gamma_f + \Gamma_r$

$$\boxed{J\frac{d\Omega}{dt} = \Phi_0 i - \beta\Omega - \Gamma_r}$$

⑥ Eq. électrique :



$E = Ri - e$

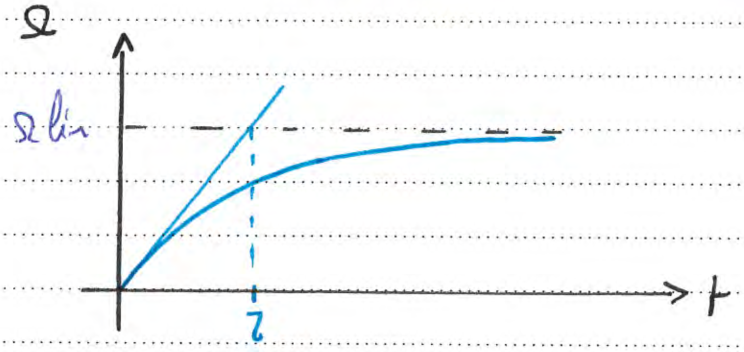
$$i(t) = \frac{E - \Phi_0 \Omega}{R}$$

⑦ $$J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Phi_0 (E - \Phi_0 \Omega)}{R} - \beta \Omega - \Gamma_r$$

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{J}\left(\beta + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\Omega = \frac{\Phi_0}{R} E - \Gamma_r$$

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\Omega = \frac{1}{\tau}\Omega_{lim}}$$

avec $\tau = \dfrac{JR}{R\beta + \Phi_0^2}$ $\qquad \dfrac{\Omega_{lim}}{\tau} = \dfrac{\Phi_0}{R} E - \Gamma_r$



La vitesse limite Ω_{lim} dépend de la charge Γ_r.

$$\Gamma_{r\,max} = \frac{\Phi_0 E}{R}$$

$\Gamma_{r\,max}$ augmente avec E et avec Φ_0