

TLB_{HE} | Bobine

Une bobine cylindrique de grande longueur comporte N spires. Sa longueur est d et le rayon de ses spires est a . On assimile le champ magnétique à celui créé par une bobine infinie. Calculer le flux de ce champ à travers une spire circulaire, en déduire le flux propre à travers N spires. Donner l'expression de l'inductance propre L_p de la bobine.

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{d} i$$

$$\text{1 spire} \quad \Phi_1 = B \times S = \mu_0 \frac{N}{d} i \times \pi a^2$$

$$\Phi_T = \mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2 i$$

$$\Phi_T = L_p i$$

$$L_p = \mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2$$

TLB 2 Bobines couplées

Deux bobines coaxiales (de même rayon a) et de grande longueur comportent respectivement N_1 et N_2 spires. On note d_1 et d_2 leur longueur respective. Chaque bobine crée un champ magnétique sensiblement égal à celui créé par une bobine infinie. Calculer le flux de \vec{B}_1 à travers la bobine 2 et le flux de \vec{B}_2 à travers la bobine 1. En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M .

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d_1} i \vec{e}_x$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi a^2}{d_1} i$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{d_2} i \vec{e}_x$$

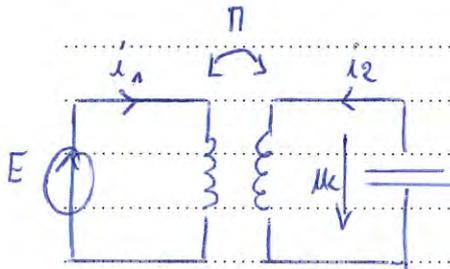
$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi a^2}{d_2} i$$

$$d = d_1 = d_2$$

$$\pi = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi a^2}{d}$$

Ex 2 Circuit

Un circuit est formé d'un ensemble de deux bobines d'inductances $L_1 = 2L$ et $L_2 = L$ couplées par une mutuelle inductance $M = L$. L_1 est alimentée au primaire par un générateur d'échelon de tension de force électromotrice E . L_2 est fermée au secondaire sur un condensateur de capacité C . Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_c et donner l'équation horaire $u_c(t)$ en considérant que pour $t < 0$ le condensateur est déchargé et toutes les intensités sont nulles.



$$\begin{cases} \textcircled{1} E = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ \textcircled{2} 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_c \end{cases}$$

$$dt \cdot i_2 = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = -\frac{L}{2L} \frac{di_2}{dt} + \frac{E}{2L}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow 0 = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{E}{2} - \frac{L}{2} C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c$$

$$\left| \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{2}{LC} u_c = -\frac{E}{LC} \right. \quad \begin{array}{l} \text{éq. diff. homogène} \\ \Rightarrow \text{ou pas d'élément dissipatif} \end{array}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

$$u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{E}{2}$$

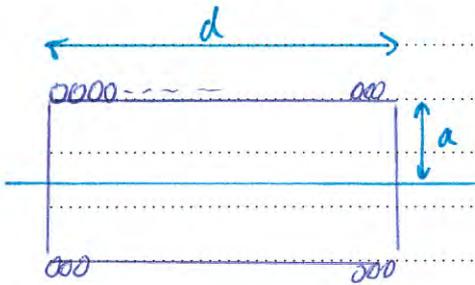
$$\begin{cases} u_c(0) = 0 \\ i_2(0) = C \frac{du_c(0)}{dt} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A - \frac{E}{2} = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\left| u_c(t) = \frac{E}{2} (\cos(\omega_0 t) - 1) \right.$$

Ex 3 Bobinages

Avec un fil de diamètre δ , on réalise un bobinage cylindrique de rayon $a \gg \delta$ sur une longueur totale $d \gg a$. Avec le même fil, on effectue un bobinage sur la première bobine, de même rayon et de même longueur, mais en effectuant deux tours. On dispose ainsi de deux bobines superposées coaxiales de rayons et de longueurs sensiblement égales, la deuxième comportant deux fois plus de spires par mètre que la première. Le seconde est fermée sur un résistor de résistance R , la première est alimentée par un générateur sinusoïdal de tension $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$. On assimile les champs magnétiques créés par les bobines de grande longueur à ceux créés par des bobines infinies. On pose $L = \frac{\mu_0 \pi a^2 d}{S^2}$ et on suppose que $R = 4L\omega$.

1. Etablir les expressions des inductances propres L_1 et L_2 et du coefficient de mutuelle induction M .
2. En déduire les équations différentielles liant i_1 et i_2 et déterminer leurs expressions en régime sinusoïdal forcé.



$$\text{Bobine 1} = N_1 = \frac{d}{\delta}$$

$$\text{Bobine 2} = N_2 = \frac{2d}{\delta}$$

Champ créé par un solénoïde infini : $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d} i_1 \vec{e}_z$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{d} i_2 \vec{e}_z$$

* Auto induction (pas de fuites magnétiques) $\Phi_{1T} = N_1 \times B_1 \pi a^2$

$$\Phi_{1T} = L_1 \cdot i_1 \quad \text{d'où} \quad \left[\begin{aligned} L_1 &= \mu_0 \frac{N_1^2}{d} \pi a^2 = \mu_0 \frac{d}{S^2} \pi a^2 & L_1 &= L \\ L_2 &= \mu_0 \frac{N_2^2}{d} \pi a^2 = \mu_0 \frac{4d}{S^2} \pi a^2 & L_2 &= 4L \end{aligned} \right]$$

* Mutuelle $\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \times B_2 S = \pi i_2$

$$\pi = \mu_0 \frac{2d}{S^2} \pi a^2 \quad \pi = 2L$$

② $u(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + \pi \frac{di_2}{dt}$

$$0 = R i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \pi \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{RSF} = \begin{cases} U_0 = jL_1 \omega \underline{I}_1 + j\pi \omega \underline{I}_2 \\ 0 = 4L \omega \underline{I}_2 + 4jL \omega \underline{I}_2 + 2jL \omega \underline{I}_1 \\ \begin{cases} U_0 = jL \omega (\underline{I}_1 + 2\underline{I}_2) \\ 0 = 2(1+j) \underline{I}_2 + \underline{I}_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$U_0 = jL\omega (-2(1+j)I_2 + 2I_1)$$

$$I_1 = -2(1+j)I_2$$

$$U_0 = 2L\omega I_2$$

$$I_1 = -2(1+j) \times \frac{U_0}{2L\omega} = -(1+j) \frac{U_0}{L\omega} = -\frac{U_0}{L\omega} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

d'au. $i_2(t) = \frac{U_0}{2L\omega} \cos(\omega t)$

$$i_1(t) = -\frac{U_0}{L\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

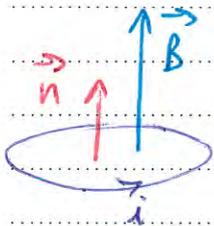
Ex 4 Comparaison Induction et auto-induction

Lorsque l'on considère une spire unique, on peut généralement négliger la fém induite devant celle qui est due à un champ extérieur, c'est à dire créé par une autre bobine, variable.

On considère ici une spire de rayon $R = 5 \text{ cm}$ et de résistance interne $r = 1 \Omega$

Le champ extérieur variable est uniforme orthogonal au plan de la spire, sinusoïdal de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et d'amplitude $B_0 = 50 \text{ mT}$.

1. Calculer l'amplitude de la fém induite dans la bobine du fait du champ extérieur.
2. En déduire (en négligeant l'auto-induction) l'amplitude du courant induit.
3. Expliquer pourquoi en négligeant l'autoinduction, on ^{sur}estime le courant induit.
4. L'expression de l'inductance propre d'une spire est délicate à établir, car on ne peut utiliser une modélisation filiforme des conducteurs (le champ diverge au voisinage de conducteurs filiforme). Il faut donc prendre en compte le rayon des fils que l'on note a . On donne l'expression $L = \mu_0 R \left(\ln \left(\frac{8R}{a} \right) - 2 \right)$. Calculer L avec $a = 0,1 \text{ mm}$
5. Calculer l'amplitude e' de la fém associé à l'auto-induction et conclure.



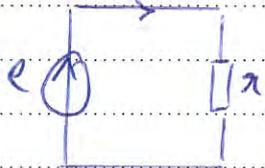
$$\textcircled{1} \quad \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \pi R^2 B_0 \cos(2\pi f t)$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{Loi de Faraday})$$

$$e = - 2\pi^2 f R^2 B_0 \sin(2\pi f t)$$

$$\hookrightarrow E = 2\pi^2 f R^2 B_0 \quad E = 0,12 \text{ V}$$

② Courant induit



$$e = \pi i \quad \left| \quad i = \frac{e}{\pi} \quad \underline{i = 0,12 \text{ A}} \right.$$

③ Le courant induit, s'oppose à la variation de flux. En négligeant, le champ magn. qu'il crée on sur-estime la variation de flux et donc la fém e et finalement i .

④ AN $L = 0,39 \mu\text{H}$

⑤ Flux associé à l'auto-induction $\Phi_p = Li$

et loi de Faraday = $e_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_p}{dt} = L \frac{di}{dt}$

d'où $E_{\text{ind}} = L \times 2\pi f \times \frac{e}{\pi} = L \frac{4\pi^3 f^2 R^2 B_0}{\pi}$

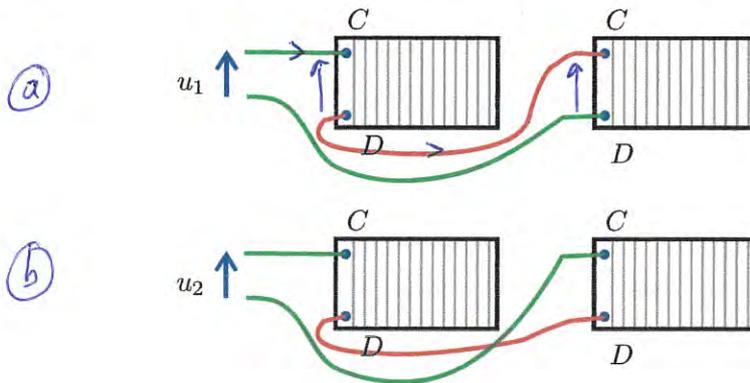
$$E_{\text{ind}} = 15 \mu\text{V}$$

$$\frac{E_{\text{ind}}}{E} = \frac{L}{\pi} 2\pi f$$

$$\boxed{\frac{E_{\text{ind}}}{E} \approx 10^{-4}}$$

Ex 5 Couplage entre bobines

On dispose de deux bobines identiques chacune d'inductance propre L et de résistance $r = 8 \Omega$. On repère les bornes de bobines par les lettres C et D . Les deux bobines sont placées à proximité l'une de l'autre. On les connecte en série dans les déplacer de manière à créer un nouveau dipôle. La connexion se fait selon les deux possibilités ci-dessous.



On alimente successivement chacun des dipôles par un courant sinusoïdal de fréquence 2 kHz. La mesure du module de l'impédance donne $Z_1 = 375 \Omega$ et $Z_2 = 225 \Omega$. En déduire les valeurs de l'inductance propre de chaque bobine et l'inductance mutuelle M des deux bobines.

(a) $i = i_1 = i_2$ $u_1 = -e_1 - e_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \pi \frac{di_2}{dt} + \pi_1 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \pi \frac{di_1}{dt} + \pi_2 i_2$

$$u_1 = (\pi_1 + \pi_2) i + (2L + 2\pi) \frac{di}{dt}$$

en R.F $Z_a = R_r + 2j(L + \pi)\omega$

(b) $i = i_1 = -i_2$ $u_2 = -e_1 + e_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \pi \frac{di_2}{dt} + \pi_1 i_1 - L_2 \frac{di_2}{dt} - \pi \frac{di_1}{dt} - \pi_2 i_2$

$u_2 = 2\pi i + 2(L - \pi) \frac{di}{dt}$

$Z_b = 2\pi + 2j(L - \pi)\omega$ $|Z_a|^2 = 4\pi^2 + 4(L + \pi)^2 \omega^2$ $|Z_b|^2 = 4\pi^2 + 4(L - \pi)^2 \omega^2$

$L + \pi = \sqrt{\frac{|Z_a|^2 - 4\pi^2}{4\omega^2}}$ $L - \pi = \sqrt{\frac{|Z_b|^2 - 4\pi^2}{4\omega^2}}$

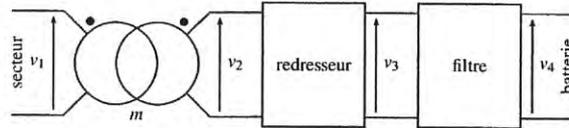
$L = \frac{1}{2\omega} \left(\sqrt{|Z_a|^2 - 4\pi^2} + \sqrt{|Z_b|^2 - 4\pi^2} \right)$ $\pi = \frac{1}{2\omega} \left(\sqrt{|Z_a|^2 - 4\pi^2} - \sqrt{|Z_b|^2 - 4\pi^2} \right)$

$L = 12 \text{ mH}$ $\pi = 3 \text{ mH}$

Ex 6 Dimensionnement d'un transformateur

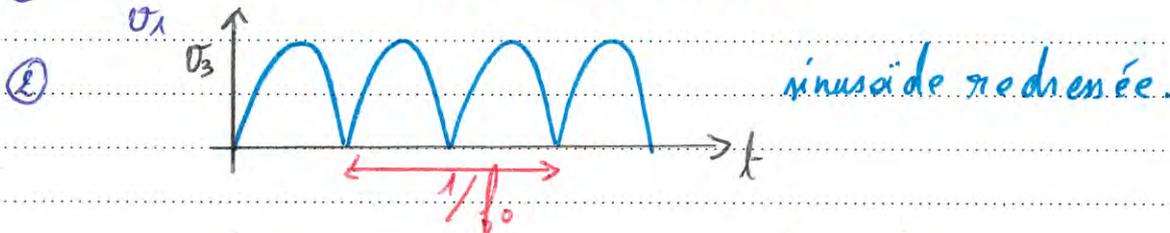
On souhaite dimensionner le transformateur utilisé pour recharger un portable. La chaîne d'énergie logée dans un boîtier placé sur le cordon d'alimentation du portable se compose successivement :

- de l'alimentation EDF du secteur qui délivre la tension $v_1(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 t)$ où $f_0 = 50 \text{ Hz}$ et $V_0 = 240 \text{ V}$.
- d'un transformateur dont la sortie est $v_2(t) = V_{02} \sin(2\pi f_0 t)$ et dont le rapport de transformation est noté m .
- d'un redresseur montage qui délivre la valeur absolue v_3 de la tension d'entrée v_2 ,
- d'un filtre moyenneur dont la sortie v_4 est la valeur moyenne de la tension d'entrée v_3 . La batterie du portable est branchée à la sortie, elle requiert une tension de charge constante $v_4 = 12 \text{ V}$.



1. Que vaut V_{02} en fonction de V_0 ?
2. Tracer le graphe de la tension $v_3(t)$.
3. Quelle est la nature du filtre utilisé entre v_3 et v_4 . Proposer une valeur pour sa fréquence de coupure, ou sa fréquence propre.
4. Etablir l'expression de la tension v_4 en fonction de V_0 .
5. En déduire la valeur de m .

① $\frac{V_2}{V_1} = m$ d'où $V_{02} = m V_0$



③ On souhaite ne conserver que la valeur moyenne de v_3 on doit utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure très inférieure à celle du fondamental f_1 ($f_1 = 2 f_0$ en redressant on double la fréquence).

On peut choisir $f_c = 10 \text{ kHz}$

④ Valeur moyenne de v_3 $T_0 = 1/f_0$

$$\langle v_3 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V_{02} \sin(2\pi f_0 t) dt = \frac{2 V_{02}}{2\pi f_0} f_0 = \frac{2 m V_0}{\pi}$$

⑤ On souhaite imposer $\langle v_3 \rangle = v_n = 12 \text{ V}$

$$m = \frac{\pi}{2} \frac{v_n}{V_0}$$

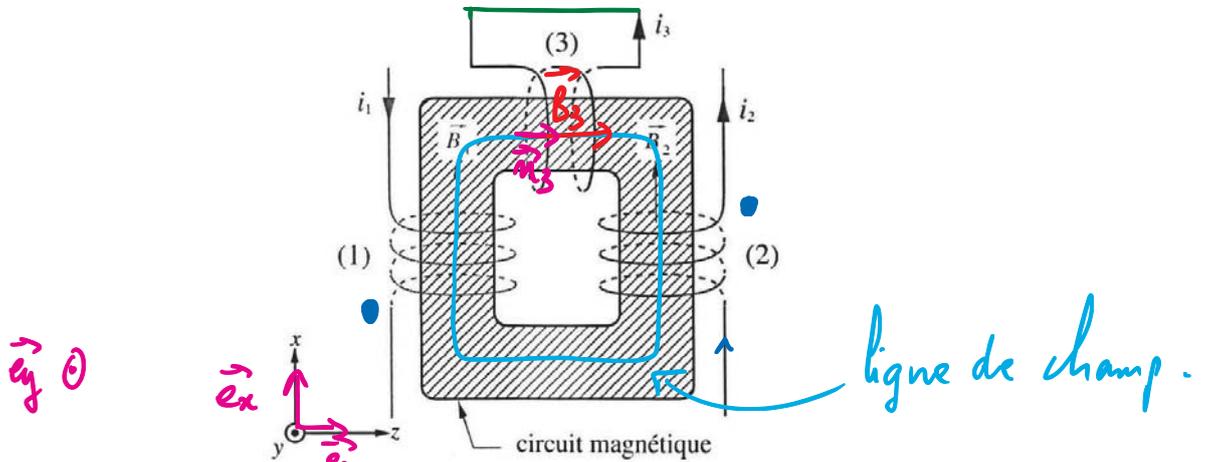
$$m = 7,8 \cdot 10^{-2}$$

plus de spires au primaire qu'au secondaire

Ex 7 Disjoncteur différentiel

On a un dispositif formé d'un circuit magnétique canalisant les lignes de champ magnétique sur lequel sont bobinés trois solénoïdes (que l'on considérera comme infinis).

On fera l'approximation suivante : dans le matériau ferromagnétique μ_0 est remplacée par $\mu_r \mu_0$ avec une valeur très élevée pour μ_r . C'est une approximation car dans un milieu non linéaire on ne peut pas définir de permittivité relative au sens strict.



1. Etablir les expressions des champs magnétiques créés dans les bobinages 1 et 2 par les courants d'intensité respective i_1 et i_2 .

En déduire le champ magnétique total créé dans le bobinage 3 (on négligera l'auto-induction).

On notera N_1 et N_2 le nombre de spires des enroulements 1 et 2. La longueur totale L de ces 2 solénoïdes est la même.

2. Calculer le courant induit i_3 dans le bobinage 3 sachant que la résistance du fil conducteur est R . On notera S_3 la section droite du bobinage 3 et N_3 le nombre de spires. On posera de plus $N = N_1 = N_2$.

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad i_2 = I_2 \sin(\omega t)$$

3. Quelle(s) application(s) peut-on avoir avec un tel dispositif ?

① Champs magnétiques :

On suppose les solénoïdes infinis $\vec{B}_1 = \mu_r \mu_0 n_1 i_1 \vec{e}_x$ → nb de spires par unité de longueur

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1}{L} i_1 \vec{e}_x$$

De même :

$$\vec{B}_2 = -\mu_0 \mu_r \frac{N_2}{L} i_2 \vec{e}_x$$

* Champ magnétique total dans le bobinage 3

On suppose que la section droite du matériau ferromagnétique est la même dans chaque solénoïde.

$$\vec{B}_3 = (B_1 - B_2) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 \mu_r}{L} (N_1 i_1 - N_2 i_2) \vec{e}_z$$

Hyp = matériau linéaire + champ magnétique parfaitement canalisé.

② Courant induit dans le bobinage 3

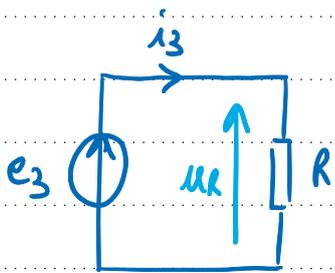


schéma électrique équivalent.

On suppose que l'enroulement ③ est court-circuité.

Loi de Faraday : $e_3 = - \frac{d\phi_3}{dt}$ avec $\phi_3 = \iint_{S_3/\epsilon} \vec{B}_3 \cdot d\vec{S} \times N_3$

$$\phi_3 = N_3 \frac{\mu_0 \mu_r}{L} (N_1 i_1 - N_2 i_2) S_3$$

flux par spire

$$\phi_3 = N_3 N \frac{\mu_0 \mu_r}{L} (i_1 - i_2) S_3 \quad \text{avec} \begin{cases} i_1 = I_1 \sin(\omega t) \\ i_2 = I_2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$e_3 = N_3 N S_3 \frac{\mu_0 \mu_r}{L} \omega (I_2 - I_1) \cos(\omega t)$$

$$i_3 = \mu_0 \mu_r \frac{N_3 N S_3 \omega}{R L} (I_2 - I_1) \cos(\omega t)$$

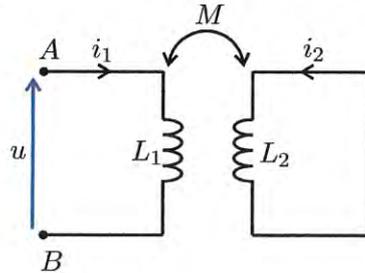
③ Si $I_1 = I_2$ alors on aura $i_3 = 0$.

⇒ principe du disjoncteur différentiel.

Le disjoncteur différentiel assure la détection d'une différence d'intensité du courant entre la phase et le neutre en comparant les intensités des différents conducteurs : dans une installation normale, le courant qui arrive dans un conducteur est identique au courant qui repart. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il existe une "fuite" de courant qui peut être dangereuse. S'il existe un courant non nul dans le circuit 3, un relais est actionné et permet d'ouvrir le circuit principal.

Ex 8 Détection par boucle inductive

En milieu urbain, la détection des véhicules par boucle inductive s'est fortement développée. Le capteur est une boucle conductrice d'inductance propre L_1 implantée dans la chaussée formée de spires de la taille de l'ordre du mètre (dipôle AB parcouru par un courant $i_1(t)$). Lorsqu'un véhicule passe, des courants de Foucault sont induits dans la carcasse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 parcouru par un courant d'intensité $i_2(t)$. On note M le coefficient de mutuelle inductance. On négligera la résistance des circuits.



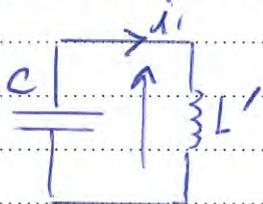
1. Montrer qu'en présence du véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L' qu'on exprimera en fonction de L_1 , L_2 et M .

2. Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. Ce circuit est composé d'une capacité C et du dipôle AB . Quelle est la pulsation de résonance? Calculer sa variation relative en fonction de la variation d'inductance.

$$\textcircled{1} \text{ Eq. couplées } = \begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + \pi \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + \pi \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\text{d'où } u = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{\pi^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = \underbrace{L_1 \left(1 - \frac{\pi^2}{L_1 L_2} \right)}_{L'} \frac{di_1}{dt}$$

② Circuit oscillant :



$$u_c = L' \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad i_c = -C \frac{du_c}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{L' C} i_1 = 0 \quad \omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L' C}}$$

Variation relative = on travaille avec le ln

$$\ln(\omega_0') = -\frac{1}{2} \ln(L' C)$$

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \frac{dL'}{L'} \quad \text{et} \quad L' = L_1 + \Delta L \quad \text{avec} \quad \Delta = -\frac{\pi^2}{L_2}$$

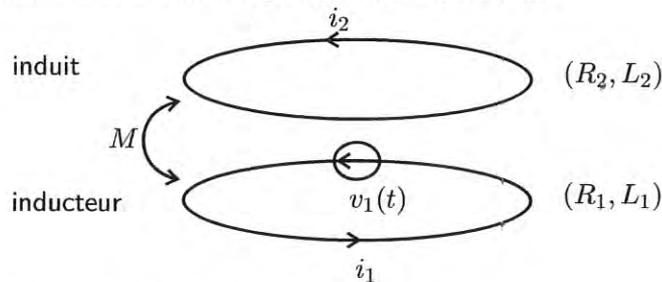
$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L'}{L'} = \frac{\pi^2}{2 L_1 L_2}$$

Ex 9 Table à induction

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

Logé dans une table en céramique, un bobinage nommé inducteur, alimenté par un courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même située au fond de la casserole. L'inducteur de rayon 5 cm comporte 20 spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega$ et d'auto-inductance $L_1 = 30 \mu\text{H}$.

L'induit est constitué de la plaque de résistance $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$. Cette plaque est assimilable à une spire unique fermée sur elle-même. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$. L'ensemble plaque-inducteur se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle M .



1. Ecrire les équations électriques relatives aux deux circuits.
2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$.
3. En déduire l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe du système.
4. On choisit ω telle que $R_1 \ll L_1\omega$ et $R_2 \ll L_2\omega$. Simplifier les deux expressions littérales précédentes puis effectuer le calcul numérique de leur module sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $M = 2 \mu\text{H}$.
5. On soulève la plaque à chauffer. On demande un raisonnement purement qualitatif : l'amplitude du courant i_1 appelé par l'inducteur augmente-t-elle ou décroît-elle ?

$$\textcircled{1} \text{ Eq. élec. : } \begin{cases} v_1(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \pi \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \pi \frac{di_1}{dt} \end{cases} \begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + jL_1\omega \underline{I}_1 + j\pi\omega \underline{I}_2 \\ 0 = R_2 \underline{I}_2 + jL_2\omega \underline{I}_2 + j\pi\omega \underline{I}_1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\frac{I_2}{I_1}} = \frac{-j\pi\omega}{R_2 + jL_2\omega} \quad \textcircled{3} \quad \underline{U}_1 = \underbrace{\left(R_1 + jL_1\omega + \frac{\pi\omega^2}{R_2 + jL_2\omega} \right)}_{\underline{Z}_e} \underline{I}_1$$

$$\textcircled{4} \quad R_1 \ll L_1\omega \quad \text{et} \quad R_2 \ll L_2\omega \quad \underline{Z}_e$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{I_2}{I_1}} = -\frac{\pi}{L_2} \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 = \left(jL_1\omega + j\frac{\pi\omega}{L_2} \right) \underline{I}_1$$

$$\underline{\left| \frac{I_2}{I_1} \right|} = 8,3 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_e| = 2,1 \Omega$$

⑤ on éloigne la plaque = la plaque voit un champ \vec{B} plus petit. Le flux diminue, π diminue alors Z_e augmente.

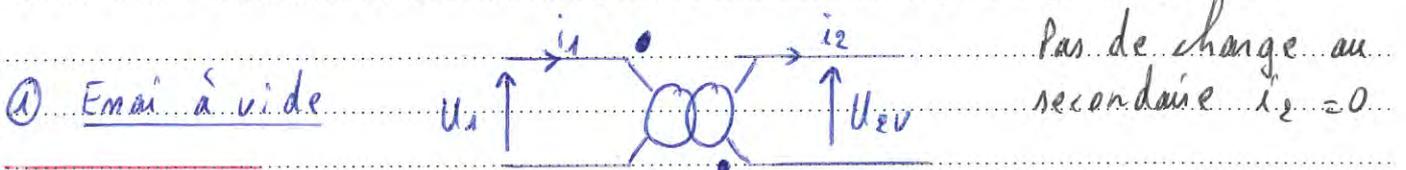
La tension d'alimentation restant constante, i_1 décroît.

Ex 10 Transformateur

L'étude d'un transformateur monophasé a donné les résultats suivants :

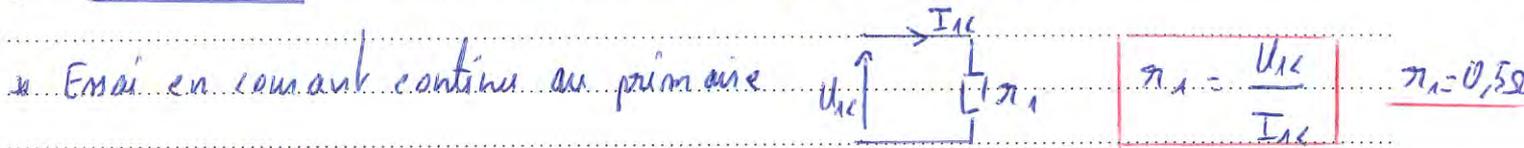
- Essai en courant continu au primaire : $U_{1C} = 5,0 \text{ V}$ et $I_{1C} = 10,0 \text{ A}$.
- Essai à vide sous tension nominale primaire : $U_1 = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$: $U_{2v} = 46 \text{ V}$, $P_{1v} = 80 \text{ W}$ et $I_{1v} = 1,0 \text{ A}$.
- Essai en court-circuit : $U_{1cc} = 40 \text{ V}$, $P_{1cc} = 250 \text{ W}$ et $I_{1cc} = 10 \text{ A}$.

1. Calculer le rapport de transformation du transformateur.
2. Montrer que l'on peut négliger les pertes dans le cuivre lors de l'essai à vide.
3. Calculer l'intensité maximale du champ magnétique sachant que le primaire comporte 500 spires, et que le circuit magnétique est de section $S = 25 \text{ cm}^2$.
4. Montrer que les pertes dans le fer sont négligeables lors de l'essai en court-circuit sachant qu'elles sont proportionnelles à U_1^2 .
5. Déterminer les éléments R_s et X_s du schéma équivalent du transformateur vu du secondaire.
6. Déterminer la tension efficace secondaire lorsque le transformateur débite un courant d'intensité nominale dans une charge inductive de facteur de puissance 0,9.
7. Déterminer le rendement du transformateur pour le fonctionnement évoqué à la question précédente.



$$m = \frac{U_{2v}}{U_1} \quad m = 0,20$$

② Pertes cuivre (effet Joule dans les conducteurs)



* Essai à vide :

$$P_J = \pi_1 I_1^2 \quad P_J = 0,5 \text{ W} \quad P_J \ll P_{1v}$$

③ champ magnétique maximal $N_1 = 500$ spires

⇒ Théorème de Boucherot = On se place au primaire et on néglige π_1

Loi de Faraday $e = - \frac{d\Phi_T}{dt}$ Φ_T flux total = $N_1 \Phi$

$$u_1 = -e \quad u_1 = \frac{d\Phi_T}{dt} = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

→ valeur efficace

car u_1 sinusoïdal $u_1 = U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t) = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$

On intègre : $\Phi(t) = \frac{U_1 \sqrt{2}}{N_1 \times 2\pi f} \sin(\omega t)$ de plus champ \vec{B} uniforme sur la section droite S

$$S B_{\max} \sin(\omega t) = \frac{U_1 \sqrt{2}}{N_1 \times 2\pi f} \sin \omega t$$

d'où la formule de Boucherot = $U_1 = 4,44 f N_1 S B_{max}$

Le T_{eff} utile pour le dimensionnement des transfo.

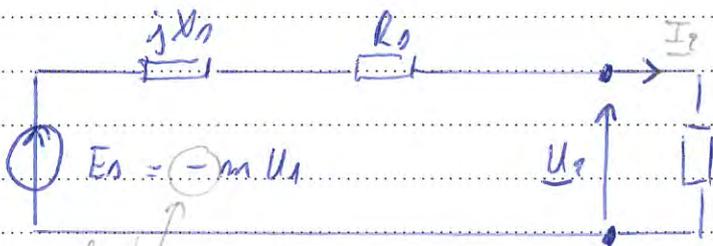
d'où $B_{max} = 0,83 T$.

④ Pertes fer

Les pertes fer sont proportionnelles à U_1^2 d'où $P_{fer} = \alpha U_1^2$
 Essai à vide $P_{1v} \approx P_{fer}$ $\alpha = \frac{P_{1v}}{U_1^2}$ $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3} W/V^2$

Essai en court-circuit $P_{fer} = \alpha U_{1cc}^2$ $P_{fer} = 2,4 W \ll P_{acc}$
 $P_{acc} \Rightarrow$ pertes cuivre nominales (courant nominal)

⑤ Schéma équivalent du transfo vu du secondaire.



la tension U_2 ne
 "pointe" pas vers la borne homologue

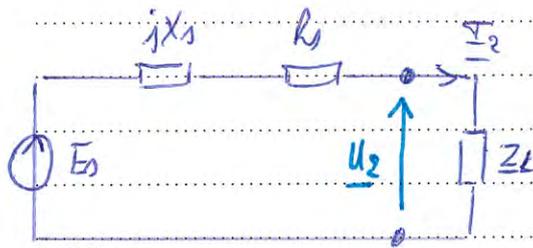
Essai en court-circuit : P_{acc} pertes Joule (cuivre)

$P_{acc} = R_s I_{2cc}^2$ mais on ne connaît que U_{1cc} et I_{1cc} $I_{2cc} = \frac{1}{m} I_{1cc}$
 $P_{acc} = R_s \frac{I_{1cc}^2}{m^2}$ $R_s = m^2 \frac{P_{acc}}{I_{1cc}^2}$ $R_s = 0,1 \Omega$

Toujours en court-circuit $U_2 = 0$ $-m U_1 = I_2 (R_s + jX_s) = Z_s I_2$
 $Z_s = -m \frac{U_1}{I_2} = -m^2 \frac{U_1}{I_{1cc}}$ $|Z_s| = m^2 \frac{U_1}{I_{1cc}}$ $|Z_s| = 0,16 \Omega$

$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2}$ $X_s = 0,12 \Omega$

⑥ On utilise le schéma équivalent du transformateur du secondaire



$$E_s = (jX_s + R_s) I_2 + U_2$$

$$U_2 = Z_L I_2$$

$$I_{en} = \frac{I_{1n}}{m}$$

$$I_{en} = 50A$$

$$\frac{U_2}{I_2} = Z_L e^{j\phi}$$

$$E_s = ((R_s + Z_L \cos \phi) + j(X_s + Z_L \sin \phi)) I_2$$

$$E_s = (R_s + jX_s) I_2 + U_2$$

$$Z^2 = (R_s + Z_L \cos \phi)^2 + (X_s + Z_L \sin \phi)^2$$

$$Z^2 = R_s^2 + X_s^2 + Z_L^2 + 2R_s Z_L \cos \phi + 2X_s Z_L \sin \phi$$

$$Z_L^2 + Z_L (2R_s \cos \phi + 2X_s \sin \phi) + R_s^2 + X_s^2 - \left(\frac{E_s}{I_2}\right)^2 = 0$$

$$Z_L = \frac{1}{2} \left(-2R_s \cos \phi - 2X_s \sin \phi + \sqrt{(2R_s \cos \phi + 2X_s \sin \phi)^2 + 4 \left(\frac{E_s}{I_2}\right)^2 - 4(R_s^2 + X_s^2)} \right)$$

et $Z_L = \frac{U_2}{I_2}$ d'où $U_2 = 38,8V$.

⑦ Rendement = puissance utile $P_u = U_2 I_2 \cos \phi_2$

Puissance absorbée $P_a = P_1 = P_2 + P_{cu} + P_{Fe}$

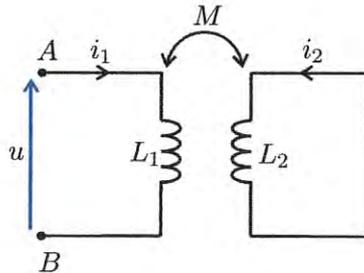
$P_{cu} = P_{acc}$ essai à courant nominal

$P_{Fe} = P_{av}$ essai à vide

$$\eta = 84\%$$

Ex 8 Détection par boucle inductive

En milieu urbain, la détection des véhicules par boucle inductive s'est fortement développée. Le capteur est une boucle conductrice d'inductance propre L_1 implantée dans la chaussée formée de spires de la taille de l'ordre du mètre (dipôle AB parcouru par un courant $i_1(t)$). Lorsqu'un véhicule passe, des courants de Foucault sont induits dans la carcasse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 parcouru par un courant d'intensité $i_2(t)$. On note M le coefficient de mutuelle inductance. On négligera la résistance des circuits.



1. Montrer qu'en présence du véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L' qu'on exprimera en fonction de L_1 , L_2 et M .

2. Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. Ce circuit est composé d'une capacité C et du dipôle AB . Quelle est la pulsation de résonance? Calculer sa variation relative en fonction de la variation d'inductance.

$$e_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - L_1 \frac{di_1}{dt} - \pi \frac{di_2}{dt}$$

$$u(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + \pi \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + \pi \frac{di_1}{dt}$$

$$u(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{\pi^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \left(1 + \frac{\pi^2}{L_1 L_2} \right)$$

$$L' = L_1 \left(1 + \frac{\pi^2}{L_1 L_2} \right)$$

② Circuit oscillant = $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C}}$

Variation relative \Rightarrow on prend le log

$$\log \omega_0 = - \frac{1}{2} \log L'C$$

$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = - \frac{1}{2} \frac{\Delta L'}{L'} = - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 / L_2}{L_1} = - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L_1 L_2}$$

avec $L' = L_1 + \Delta L_1$ $\Delta L_1 = - \frac{\pi^2}{L_2}$

Ex 1 Flux magnétique

L'espace est décrit un repère cartésien dans lequel règne un champ magnétique uniforme et stationnaire : $B = -e_x + 2e_y + 4e_z$. Quel est le flux magnétique à travers une surface $S = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2$ dessinée sur un plan d'équation $x - 2y + z = 2$?

plan $x - 2y + z = 2$ Vecteur normal au plan
 $\vec{p} = e_x - 2e_y + e_z$

Vecteur unitaire $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}} (e_x - 2e_y + e_z)$
 $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Champ p uniforme =

$$\Phi = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n} = \frac{S}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{S}{\sqrt{6}} (-1 - 4 + 4)$$

$$\Phi = -\frac{S}{\sqrt{6}} \quad \Phi = \pm 2,10^{-1} \text{ Wb}$$

⚠ On n'a pas orienté la surface ! d'où le \pm