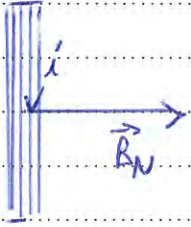


TLB_{REC} | Solénoïde

Le champ magnétique au centre d'une spire de rayon R parcourue par le courant I est $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Calculer la valeur du champ magnétique au centre d'une bobine de $N = 500$ tours de fil pour $I = 1$ A.

$$R = 2 \text{ cm}$$



Principe de superposition :

$$B_N = N B_0$$

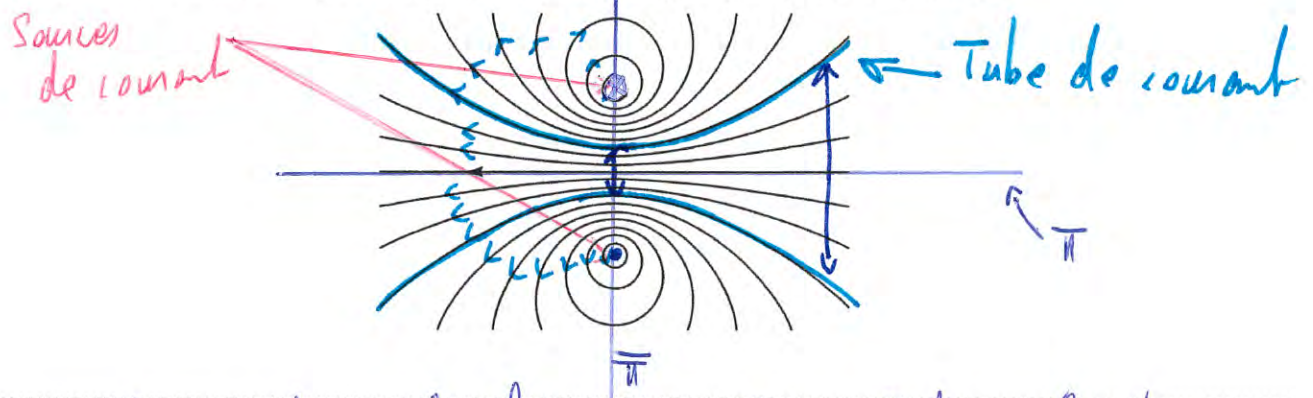
$$B_N = \mu_0 \frac{NI}{2R}$$

$$\underline{B_N = 16 \text{ mT}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

TLB_{NCE} 2 Lignes de champ

1. Orienter la totalité des lignes de champ.
2. Analyser soigneusement les symétries. En déduire où se situent les fils. Indiquer dans quel sens circule le courant.
3. Dans quelle zone de la figure la norme du champ magnétique est-elle maximale?
4. En quel point de l'axe de la spire la norme du champ magnétique est-elle maximale?



2. Sources de courant le champ magnétique "tourne" autour de sa source.

π est un plan de symétrie du champ $\vec{B}$
 $\Rightarrow$ La distribution de courant est antisymétrique

$\bar{\pi}$ plan d'antisymétrie du champ $\vec{B} \Rightarrow$ plan de symétrie pour la distrib. de courant.

de plus le champ n'est pas défini sur les fils parcourus par un courant d'intensité i .

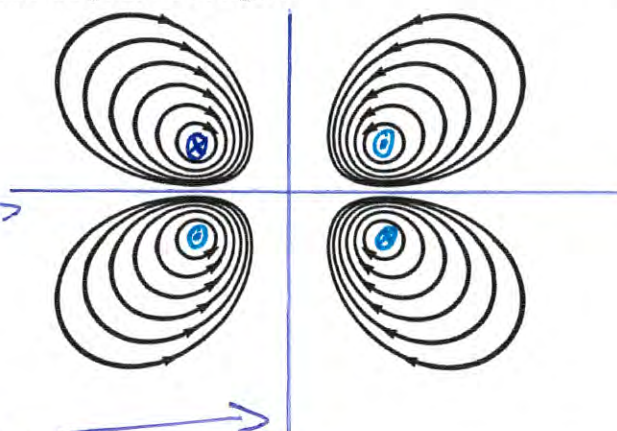
$\Rightarrow$ Les lignes de champ ne passent pas par les fils.

orientation = règle de la main droite.

③ le champ magnétique est max dans le plan de la spire
 $\Rightarrow$ rapprochement des lignes de champ d'un tube de courant.

④ Point O - Centre de la spire

T.B. 3 Dans la carte de champ magnétique de la figure ci-contre indiquer où sont les sources de courant. Préciser si le courant sort ou rentre du plan de la figure.



plan de symétrie
du champ =
antisymétrie par la
distrib. de courant.

Ex 1 Fils infinis

Deux fils verticaux très longs sont distants de $d = 8 \text{ cm}$. Ils sont parcourus par un courant de même intensité $I = 5 \text{ A}$. Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique créé par le courant en un point M situé dans le plan des fils et à égale distance de chacun d'eux.

1. si les courants dans les fils sont de même sens.
2. si les courants dans les fils sont de sens contraire.



① π_1 le plan qui contient les fils et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant.

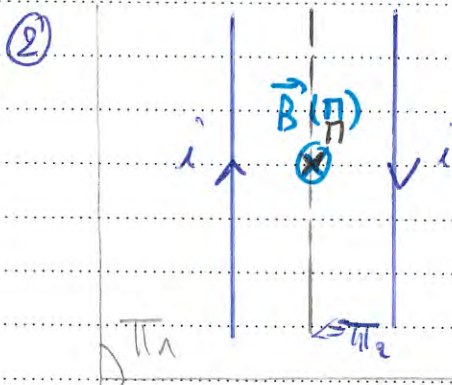
$\vec{B}(M)$ est orthogonal à π_1
 $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$

π_2 plan qui passe par M
 $\hookrightarrow$ plan de symétrie

$\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan

$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$

$\Rightarrow$ on peut aussi appliquer le théorème de superposition (champ créé par un fil)



π_1 est toujours un plan de symétrie.

π_2 plan d'antisymétrie

$\vec{B} = B(M) \vec{e}_\theta$

Superposition $B\left(\frac{d}{2}\right) = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(\frac{d}{2}\right)}$

$$B(M) = \frac{2\mu_0 I}{\pi d}$$

$$B(M) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$AN = B(M) = \frac{2 \times 10^{-7} \times 5}{\pi \times 8 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Ex 3 Champ magnétique terrestre

Le moment magnétique de la Terre est $\vec{M} = -M\vec{u}_z$ où $M = 7,9 \cdot 10^{22} \text{ A m}^2$ et $\vec{u}_z$ est l'axe géomagnétique

1. En utilisant la formule du champ magnétique créé par un dipôle :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3} \cos \theta \vec{u}_r + \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin \theta \vec{u}_\theta$$

déterminer les composantes et la norme du champ magnétique terrestre à Versailles. La latitude de Versailles est $48,80^\circ$ et le rayon de la Terre est $R_T = 6378 \text{ km}$.

$$B_r = 45,82 \mu\text{T}$$

$$B_\theta = 20,06 \mu\text{T}$$

Ex 4 Variation de B

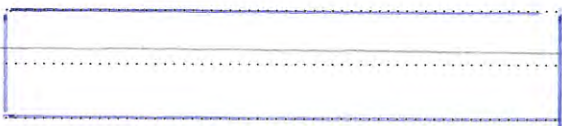
On se place dans le cas d'un solénoïde de grande longueur pour le quel le champ interne est uniforme à l'intérieur et négligeable à l'extérieur.

1. Rappeler quelle propriété on obtient en multipliant l'intensité du champ magnétique par la longueur parcourue lorsqu'on suit une ligne de champ magnétique.

produit scalaire!

2. Appliquer ceci pour une ligne de champ traversant le solénoïde et se refermant à l'extérieur. En déduire la valeur du champ interne en fonction de i , N , ℓ et d'une constante.

3. Retrouver la formule donnant le champ interne d'un solénoïde infini.



① le long d'une ligne de champ

$$\mathcal{E} = \mu_0 \cdot I \cdot \text{cauant en laie}$$

$$\mathcal{E} = \mu_0 N i$$

Δ circulation $\mathcal{E} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$

② Ici, on suppose le champ nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur

$$\mathcal{E} = \ell \times B_{\text{int}} = \mu_0 I \ell = \mu_0 N i$$

$$B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N i}{\ell} = \mu_0 \cdot n \cdot i$$

↳ nb de spires par unité de longueur.

Ex 5 Spires concentriques

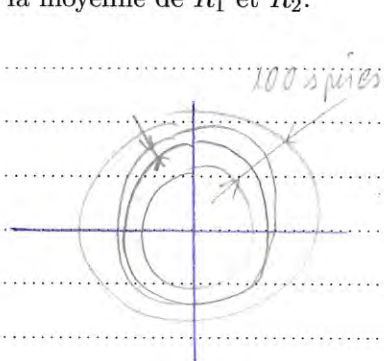
Une bobine circulaire plate est considérée comme un ensemble de N spires circulaires concentriques dont les rayons sont régulièrement répartis entre deux valeurs extrêmes R_1 et R_2 . On note i le courant dans la bobine et on prendra pour les AN : $N = 100$, $i = 100$ mA, $R_1 = 19$ cm et $R_2 = 21$ cm.

1. Donner l'expression du champ créé au centre de la bobine sachant que le champ au centre d'une spire de rayon R est égal à

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

2. Calculer le champ au centre de cette bobine.

3. Calculer l'écart relatif entre cette valeur et celle que l'on obtiendrait en considérant N spires de rayon égal à la moyenne de R_1 et R_2 .



(1) 1 spire = $B = \frac{\mu_0 i}{2R}$

1 spire quelconque :

$$dB(\pi) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \times dN$$

↳ champ élémentaire créé par les dN spires à la distance π du centre.

$$dN = \frac{N}{R_2 - R_1} \times dr$$

↳ nb de spires par unité de longueur

$$dB = \frac{N \mu_0 i}{2(R_2 - R_1)} \frac{dr}{\pi} \Rightarrow B = \frac{N \mu_0 i}{2(R_2 - R_1)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

on intègre de R_1 à R_2

(3) $B_m = \frac{N \mu_0 i}{(R_1 + R_2)}$

$$\Rightarrow B = 3,144 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$\Rightarrow B_m = 3,141 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Ecart relatif : 0,1%

Ex 6 Champ uniforme

On considère deux bobines de Helmholtz : deux bobines plates de rayon R et de N spires chacune de même axe Ox et séparées par une distance $d = O_1O_2$.

Le courant circule dans le même sens dans les deux bobines. On s'intéresse au champ magnétique créé par ce dispositif au voisinage du point O , milieu de O_1O_2 . Le champ créé par une spire sur son axe Ox est donné par l'expression suivante :

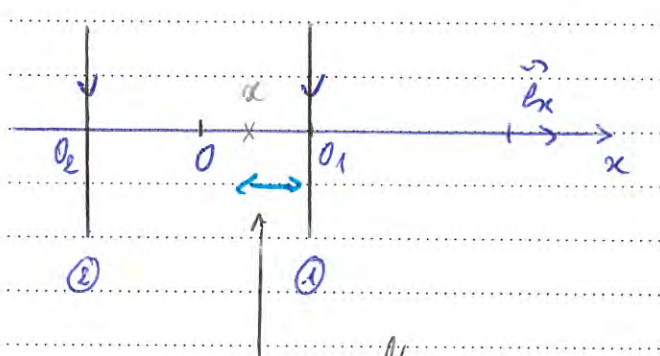
$$B = \pm \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x.$$

1. Vérifier que le champ est nul en O .

↳ signe dépend du sens de i

2. En considérant chaque bobine comme N spires circulaires confondues, donner l'expression du champ en un point M de l'axe Ox .

3. Montrer que si $d = R$, le champ au voisinage du point O sera constant en x .



① champ en x

$$\vec{B}_2(x) = \frac{N \mu_0 i}{2R} \left(1 + \left(\frac{x + d/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x$$

$$\vec{B}_1(x) = \frac{N \mu_0 i}{2R} \left(1 + \left(\frac{x - d/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x$$

pour l'expression du champ
c'est la distance à la bobine qui
importe (module de $\vec{B}$ = fonction paire).
 $\vec{B}$ garde la même direction $\vec{e}_x$.

$$\vec{B}(x) = \frac{N \mu_0 i}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{x + d/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x - d/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{e}_x$$

③ $d = R$. On se place au voisinage de O et on fait un D.L.

$$\left(\frac{x + R/2}{R} \right)^2 = \left(\frac{2x + R}{2R} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{R} \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{R/2 - x}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{R} \right)^2$$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2R} \left[\left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{e}_x$$

La fonction $B(x)$ est une fonction paire
 $\Rightarrow$ son DL ne va contenir que des termes d'ordre pair.

On va faire un DL à l'ordre 2 (qui sera donc égal à un DL à l'ordre 3).

Pour le DL 2 méthodes :

① formule générale $B(y) = B(0) + \frac{dB}{dy}(0) \times y + \frac{d^2B}{dy^2}(0) \times \frac{y^2}{2} + \dots$ et $y = \frac{x}{2}$

② DL successifs.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{4} (1 + 2y)^2\right)^{-3/2} &= \left(1 + \frac{1}{4} (1 + 4y + 4y^2)\right)^{-3/2} \\ &= \left(\frac{5}{4} + y + y^2\right)^{-3/2} \\ B_2 &= \left(\frac{5}{4}\right)^{-3/2} \left(1 + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5}y^2\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

À l'ordre 2 : $B_2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{4}{5}y + \frac{4}{5}y^2\right) + \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2\right)$

$$\tilde{B}_2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{6}{5}y - \frac{6}{5}y^2 + \frac{2 \times 3}{5} y^2\right)$$

$$\tilde{B}_2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{6}{5}y\right)$$

$$\tilde{B}_1 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{6}{5}y\right)$$

au 2^e ordre

$$\tilde{B}_T \approx 2 \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}$$

Bilan si $d = R$, au voisinage du point O .

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2R} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}^{-3/2} \vec{e}_x$$

→ on peut faire le cas général (quelconque) et vérifier que pour $d = R$, le champ est constant proche de O .

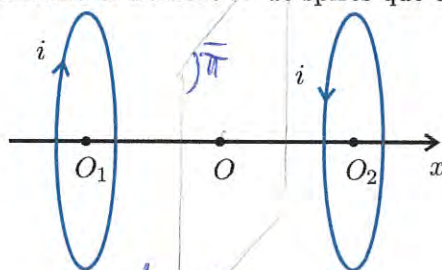
Ex 7 Champ linéaire

On considère un dispositif analogue aux bobines de Helmholtz : deux bobines plates de rayon R et de N spires chacune de même axe Ox et séparées par une distance $d = O_1O_2$.

La différence est que le courant circule en sens opposé dans les deux bobines. On s'intéresse au champ magnétique créé par ce dispositif au voisinage du point O , milieu de O_1O_2 . Le champ créé par une spire sur son axe Ox est donné par l'expression suivante :

$$B = \pm \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x.$$

1. Vérifier que le champ est nul en O .
2. En considérant chaque bobine comme N spires circulaires confondues, donner l'expression du champ en un point M de l'axe Ox .
3. Montrer que si $d = \sqrt{3}R$, le champ au voisinage du point O varie linéairement avec x à des termes du cinquième ordre en x près.
4. On souhaite un champ au voisinage de O linéaire de pente $a = 10 \text{ T/m}$ avec un courant d'intensité $I = 10 \text{ mA}$ et des bobines de rayon $R = 10 \text{ cm}$. Calculer le nombre N de spires que doit comporter chaque bobine.



① En O = tout plan qui contient l'axe (Ox) est plan d'anti-symétrie.
 $\Rightarrow$ Le champ $\vec{B}(O)$ est porté par Ox .

de plus $\vec{u}$ est aussi plan d'anti-symétrie le champ est aussi contenu dans ce plan $\Rightarrow$ d'où $\vec{B}(O) = \vec{0}$.

②
$$\vec{B}(x) = \frac{N\mu_0 i}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{d/2 - x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} - \left(1 + \left(\frac{d/2 + x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{e}_x$$

③ Le champ $B(x)$ (module) est une fonction impaire et ne contient que des termes d'ordre impair.

On va donc faire un DL à l'ordre 3 et montrer que les termes d'ordre 3 se compensent dans la configuration imposée.

$$\frac{d/2 + x}{R} = \frac{d + 2x}{2R} = \frac{d}{2R} \left(1 + \frac{2x}{d} \right)$$

On pose $y = \frac{x}{d}$

$$\tilde{B}_z = \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} (1 + 2y)^2 \right)^{-3/2} = \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} (1 + 4y + 4y^2) \right)^{-3/2}$$

$$\tilde{B}_z = \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} + \frac{d^2}{R^2} y + \frac{d^2}{R^2} y^2 \right)^{-3/2}$$

$$\tilde{B}_z = d^{-3/2} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} y + \frac{d^2}{4R^2} y^2 \right)^{-3/2}$$

$$\tilde{B}_z = d^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{4R^2} y - \frac{3}{2} \frac{d^2}{4R^2} y^2 + \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} \left(\frac{d^4}{4^2 R^4} y^2 + \frac{2d^4}{4^2 R^4} y^3 \right) \right)$$

ordre 1

$$- d^{-3/2} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{d^6}{4^3 R^6} y^3$$

ordre 3

de même pour $\tilde{B}_x$ - Les termes pairs sont identiques et se compensent.

On souhaite annuler les termes d'ordre 3 =

$$\frac{\cancel{5}}{4} \times \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{2d^4}{4^2 R^4} - \frac{1}{6} \times \frac{\cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{8} \times \frac{d^6}{4^3 R^6} = 0$$

$$2 - \frac{7}{6} \frac{d^2}{4R^2} = 0$$

$$\frac{2 \times 6}{2 \times 6} \frac{d^2}{4R^2} = \frac{7d^2}{4R^2}$$

$$12 + 3 \frac{d^2}{R^2} = 7 \frac{d^2}{R^2}$$

$$12 = 4 \frac{d^2}{R^2}$$

$$3 = \frac{d^2}{R^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{R} = \sqrt{3}}$$

Avec ce rappel, il ne reste au voisinage de 0 que des termes d'ordre 1.

$$B(y) = \cancel{2} d^{-3/2} \frac{N \mu_0 i}{\cancel{2} R} \times \frac{3}{2} \frac{3 R^2}{\cancel{\alpha} R^2} y$$

$$\text{avec } \alpha = 1 + \frac{3 R^2}{4 R^2} = 7/4$$

$$B(y) = \left(\frac{7}{4}\right)^{-5/2} \times \frac{9}{2} \frac{N \mu_0 i}{R} \times \frac{\alpha}{\sqrt{3} R}$$

$$B(x) = \left(\frac{4}{7}\right)^{5/2} \frac{3\sqrt{3}}{2} \mu_0 N i \frac{x}{R^2}$$

Ex 3 Aimantation

Le tableau ci-dessous indique de ordres de grandeur d'aimantation de plusieurs matériaux magnétiques permettant de fabriquer des aimants permanents. L'aimantation d'un matériau est définie comme le moment magnétique volumique, c'est-à-dire le moment magnétique d'un échantillon de ce matériau rapporté à son volume.

1. Rappeler la dimension d'un moment magnétique et vérifier l'unité de l'aimantation donnée dans le tableau.
2. Les matériaux pour fabriquer des aimants permanents doivent-ils posséder une aimantation forte ou faible?
3. Considérons un aimant cylindrique NdFeB (Néodyme, fer, bore) d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$ et de rayon $R = 5 \text{ mm}$. Calculer son moment magnétique.
4. Combien de spires de même rayon R et parcourues par un courant d'intensité $I = 100 \text{ mA}$ faudrait-il bobiner pour obtenir le même moment magnétique?

Matériau	Aimantation ($\text{kA} \cdot \text{m}^{-1}$)
AlNiCo 200	600
Ferrite 1000	1700
NdFeB	2000 à 4000
SmCo 5	2000 à 3000
SmCo 17	3500 à 5000

① Le moment magnétique d'une spire (circuit fermé) s'exprime par $\vec{m} = I \vec{S}$

$$\|\vec{m}\| = IS \quad [\|\vec{m}\|] = I L^2 \quad \text{en } \text{A} \cdot \text{m}^2$$

ici l'aimantation est définie par $A = \frac{\|\vec{m}\|}{V}$

$$\text{d'où } [A] = I \cdot L^{-1} \quad \text{en } \text{A/m} \quad \text{OK}$$

② Un bon aimant doit avoir un moment magnétique élevé pour un volume faible $\Rightarrow$ il doit avoir une forte aimantation.

$$\textcircled{3} \quad \|\vec{m}\| = A \times V \quad \text{avec} \quad V = e \times \pi R^2$$

$$m = A e \pi R^2$$

$$m = 0,8 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

④ Nombre de spires N :

m_s = moment magnétique créé par 1 spire : $m_s = I \pi R^2$

$$m_{\text{tot}} = N m_s = N I \pi R^2$$

et on souhaite $m_{\text{tot}} = m$

d'où $N I \pi R^2 = A e \pi R^2$

$$N = \frac{A}{I} e$$

$$N = 3.10^4 \text{ spires}$$

Il faut donc 30.10^3 spires pour obtenir le même moment magnétique !



