

Devoir confiné n°5

à rendre vendredi 27 mars

Mouvement d'une planète

Dans le système solaire, une planète assimilée à un point matériel M de masse m est soumise uniquement à l'attraction gravitationnelle du soleil situé en O (origine du référentiel galiléen \mathcal{R}) et de masse M_s .

1. Montrer que le mouvement de la planète est plan. Définir la constante des aires C .

2. Démontrer que la vitesse de M peut s'écrire $\vec{v} = -Cu' \cdot \vec{e}_r + Cu \cdot \vec{e}_\theta$ en posant $u = \frac{1}{r}$, et $u' = \frac{du}{d\theta}$. En déduire une expression de la norme v de la vitesse.



3. Exprimer l'énergie mécanique E_m de M . Montrer alors que le mouvement de M satisfait à l'équation différentielle $u'^2 + u^2 - \alpha u = \beta$ où α et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de E_m , C et \mathcal{G} la constante de gravitation et des deux masses.

4. En déduire une équation différentielle du second ordre pour $u(\theta)$.

5. Résoudre cette équation différentielle et en déduire que la trajectoire est une conique dont on exprimera l'excentricité e en fonction de α et β puis en fonction des constantes du problème.

6. Déterminer la nature de la conique suivant le signe de l'énergie mécanique.