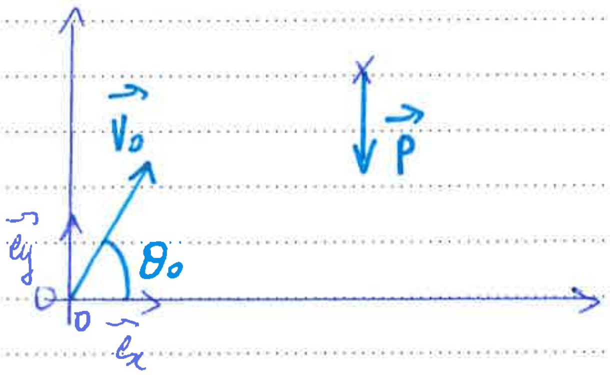
Volant de Badminton



Syst = Volant de masse m

Ref terrestre supposé galiléen

Bilan de forces = $\vec{P} = m\vec{g}$

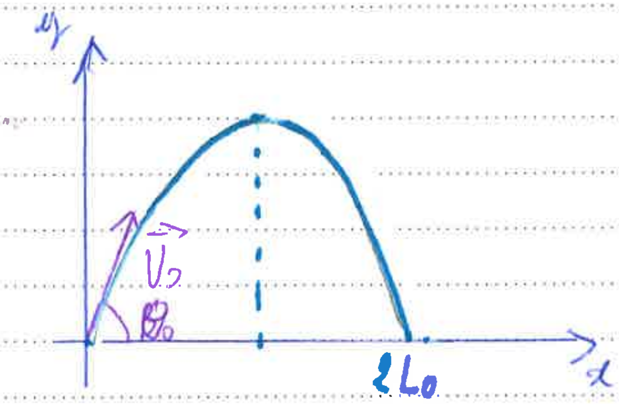
PFD = $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = g \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = V_0 \cos\theta_0 \\ \dot{y} = V_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= V_0 \cos\theta_0 \, t \\ y(t) &= V_0 \sin\theta_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

② On élimine t = $t = x / V_0 \cos\theta_0$

$$\boxed{y = x \tan\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta_0}}$$

Trajectoire parabolique



③ Portée $y = 0$ $y(t) = t \underbrace{\left(V_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t \right)}_{=0} = 0$

$V_0 \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{L_0}{V_0 \cos\theta_0} = 0$ (On élimine t)

$$L_0 = 2\frac{V_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \qquad \boxed{L_0 = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\theta_0)}$$

(4) $$\left[\frac{V_0^2}{g}\sin(2\theta)\right] = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L \quad \text{OK.}$$

* $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad L_0 = 0$ Mouvement vertical.
* $V_0 = 0$ $\quad L_0 = 0$ sans vitesse initiale, pas de mouvement.
* $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad L_0 = \frac{V_0^2}{g}$ portée max.

Ordre de grandeur $V_0 = 58\ m/s$

$L_0 \simeq 360\ m$ incohérent : il n'est pas raisonnable de négliger les frottements.

(5) Portée max pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \boxed{L_{max} = \frac{V_0^2}{g}}$

(6) Coefficient de traînée.

$$[F] = [\rho S C_x v^2] \qquad [C_x] = \frac{[F]}{[\rho S v^2]}$$

$$[C_x] = \frac{\cancel{M} L \cancel{T^{-2}}}{\cancel{M} L^{-3} L^2 L^2 \cancel{T^{-2}}} = 1$$

C_x est sans dimension

⑦ <u>Equa diff vérifiée par $\vec{v}$</u>

On reprend le PFD de la 1ère partie en ajoutant la force de trainée.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{1}{2}\rho S C_x v\vec{v}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\rho S}{m}C_x v\vec{v} = \vec{g}}$$

Solution particulière = régime permanent $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

$$\frac{1}{2}\frac{\rho S}{m}C_x v_\infty \vec{v_\infty} = \vec{g}$$

$\vec{v_\infty}$ est colinéaire à $\vec{g}$ suivant $-\vec{e_y}$

$\vec{v_\infty} = -v_\infty \vec{e_y}$

d'où $\frac{1}{2}\frac{\rho S}{m}C_x v_\infty^2 = g$ $\quad v_\infty = \sqrt{\frac{2gm}{\rho S C_x}}$

$$\boxed{\vec{v_\infty} = -\sqrt{\frac{2gm}{\rho C_x S}}\,\vec{e_y}}$$

$\Rightarrow$ le mouvement en régime permanent sera rectiligne uniforme.

⑧ On a d'après la question précédente :

$$\frac{\rho S}{2m}C_x = \frac{g}{v_\infty^2} \qquad \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{g}{v_\infty^2}v\vec{v} = \vec{g}}$$

(9) $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{g}{v_\infty^2} v \vec{v} = \vec{g}$

Poids /m

Force de frottement /m

On peut négliger le poids devant F si $g \ll \frac{g}{v_\infty^2} v^2$

$$\boxed{v_\infty^2 \ll v^2}$$

Le poids est négligeable devant la force de frottement tant que la vitesse du volant est très grande devant la vitesse en régime permanent.

En négligeant le poids : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{g}{v_\infty^2} v \vec{v} = \vec{0}$

L'accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}$

$\Rightarrow$ la trajectoire est rectiligne.

On peut réécrire l'équa diff : $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{g}{v_\infty^2} v^2 = 0}$

On intègre en séparant les variables :

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{g}{v_\infty^2} dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{g}{v_\infty^2} dt \qquad \frac{1}{V_0} - \frac{1}{v} = -\frac{gt}{v_\infty^2}$$

d'où $\boxed{v(t) = \frac{1}{\frac{1}{V_0} + \frac{gt}{v_\infty^2}}}$

⑩ Expression de $t_{1/2}$

$$v(t_{1/2}) = \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{\frac{1}{V_0} + \frac{g t_{1/2}}{v_\infty^2}}$$

$$\left(\frac{1}{V_0} + \frac{g t_{1/2}}{v_\infty^2}\right) \times \frac{1}{2} V_0 = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{g t_{1/2}}{2 v_\infty^2} V_0 = 1 \qquad \boxed{t_{1/2} = \frac{v_\infty^2}{g V_0}}$$

$$t_{1/2} = 8 . 10^{-2} s$$

- Chronophotographie : les images sont prises toutes les 50 ms.

On a donc $t_{1/2}$ entre le 2e et 3e point.

Vérification : On mesure la distance entre les 2 premiers points ($d_1 = 2,8$ cm) et entre le 2e et le 3e ($d_2 = 1,8$ cm) $\Rightarrow$ la vitesse est donc quasiment divisée par 2.

⑪ Distance horizontale

Dans cette phase, la trajectoire est supposée rectiligne et donc colinéaire à $\vec{V_0}$ (vitesse initiale).

On obtient la composante suivant x par projection :

$$v_x(t) = v(t) \cos(\theta_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \cos(\theta_0) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{V_0} + \frac{g t}{v_\infty^2}}$$

On intègre $x(t) - x(0) = \cos(\theta_0) \displaystyle\int_0^t \frac{dt}{\frac{1}{V_0} + \frac{gt}{v_\infty^2}}$, $x(0) = 0$

$$x(t) = \cos(\theta_0) \frac{v_\infty^2}{g} \left[\ln\left(\frac{1}{V_0} + \frac{gt}{v_\infty^2} \right) \right]_0^t$$

$$\boxed{x(t) = \cos(\theta_0) \frac{v_\infty^2}{g} \ln\left(1 + \frac{V_0}{v_\infty^2} g t \right)}$$

(12) on doit exprimer t en fonction de v et remplacer :

$$v = \frac{1}{\frac{1}{V_0} + \frac{gt}{v_\infty^2}} \qquad \frac{1}{v} = \frac{gt}{v_\infty^2} + \frac{1}{V_0}$$

$$\frac{gt}{v_\infty^2} = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0}$$

On peut remplacer : $\boxed{x(v) = \cos\theta_0 \frac{v_\infty^2}{g} \ln\left(\frac{V_0}{v} \right)}$

(13) Composante verticale de la force de traînée :

$F_y = -\frac{1}{2} \rho S C_x v v_y = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 \sin\theta_0$ (mvt rectiligne)

$F_y = -mg = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 \sin\theta_0$

d'où $v = \sqrt{\dfrac{2mg}{\rho S C_x \sin\theta_0}}$ $\qquad \boxed{v = \dfrac{v_\infty}{\sqrt{\sin\theta_0}}}$

$$\boxed{L = \cos\theta_0 \frac{v_\infty^2}{g} \ln\left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{v_\infty} \right)}$$

(14) le régime permanent n'est jamais réellement atteint (la trajectoire n'est pas verticale).
Mais le mvt semble uniforme.

(15) Poids négligeable

(16) Dans cette approximation, on a $L = \cos\theta_0 \dfrac{v_\infty}{g} \ln\left(\dfrac{V_0 \sin\theta_0}{v_\infty}\right)$

$L = 5{,}4\,m$, $\quad L \ll L_0$

sur la chronophotographie, $L_{max} \simeq 9\,m$

$\Rightarrow$ on ne peut pas négliger le régime intermédiaire

(17) Analyse dimensionnelle : $[D] = [m]^\alpha [v_\infty]^\beta [g]^\gamma$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 = \beta + \gamma & 1 = -2\gamma + \gamma = -\gamma \\ 0 = \alpha & \alpha = 0 \\ 0 = \beta + 2\gamma & \beta = -2\gamma \end{array}\right\} \quad \boxed{D = k \dfrac{v_\infty^2}{g}}$$

constante sans dimension

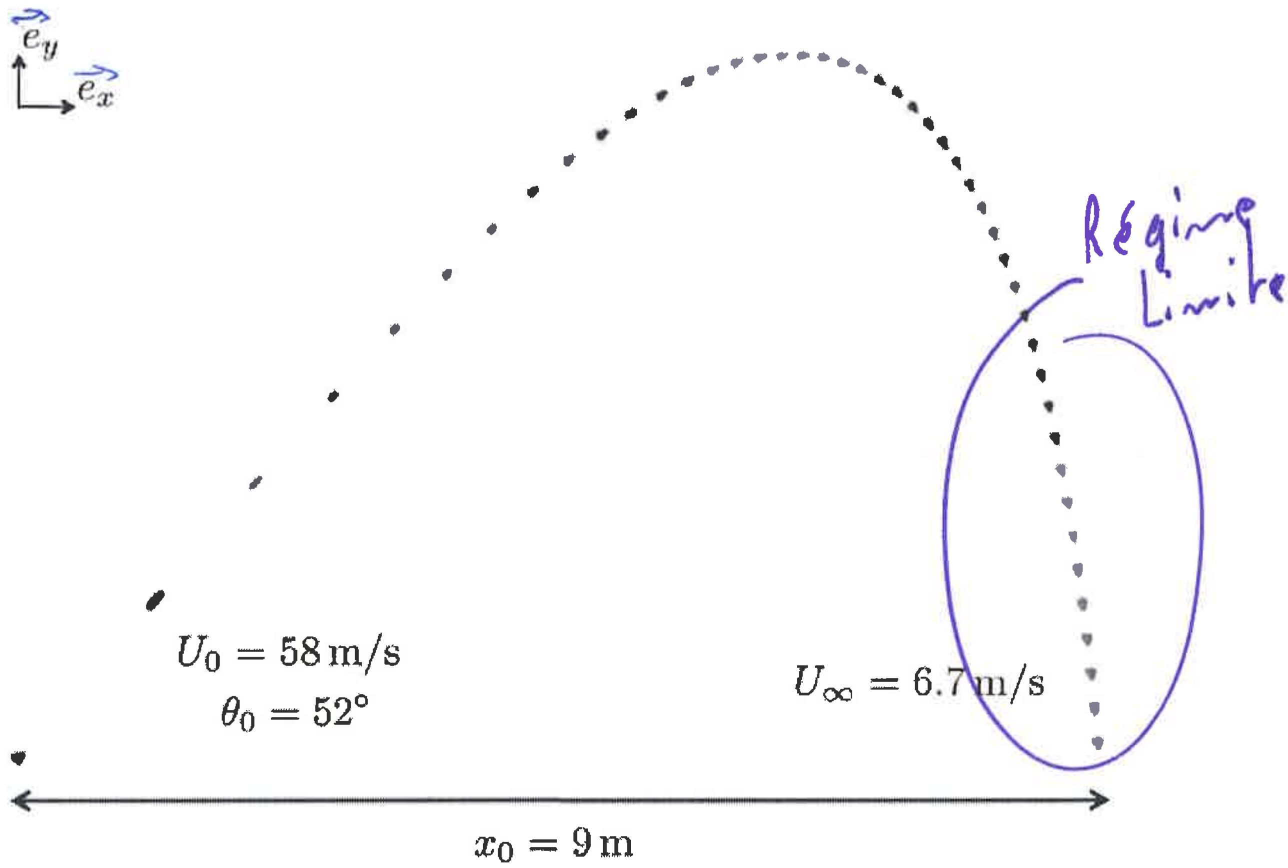
(18) $\underline{L' = L + D}$ $\quad \underline{L' \simeq 10\,m}$

$\hookrightarrow$ Bon ordre de grandeur.

Nom :

Problème 4 : Trajectoire d'un volant de badminton

Question **Chronographie à annoter**



Chronophotographie de la chute d'un volant de badminton. Le volant va de la gauche vers la droite et sa position est enregistrée toutes les 50 ms. Le premier point correspond au lancer à $t = 0$.
Les vitesses U_0 et U_∞ de cette figure correspondent aux vitesses V_0 et v_∞ du texte.