

Piège de Penning

①

Partie 1 = Rôle des électrodes

① Force exercée sur l'électron :

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad q = -e \quad \text{et} \quad \vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

On exprime les dérivées partielles :

$$\vec{F} = +e \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{2d^2} \times 2x = \frac{V_0}{d^2} x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_0}{2d^2} \times 2y = \frac{V_0}{d^2} y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_0}{2d^2} \times 2 \times (-2z) = -\frac{2V_0}{d^2} z$$

$$\vec{F} = + \frac{eV_0}{d^2} x \vec{u}_x + \frac{eV_0}{d^2} y \vec{u}_y - \frac{2eV_0}{d^2} z \vec{u}_z$$

On identifie la constante positive A :

$$A = \frac{eV_0}{d^2}$$

② Position d'équilibre

On néglige le poids de l'électron. Il n'est donc soumis qu'à la force $\vec{F}$. Cette force dérive de l'énergie potentielle $E_p = -eV(\pi)$.

L'électron est à l'équilibre quand $\vec{F} = 0$

ou de manière équivalente $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$

Sa position d'équilibre est donc $0 = x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$

Etude de la stabilité (2 méthodes) :

$$\vec{F} = A x \vec{u}_x + A y \vec{u}_y - 2A z \vec{u}_z$$

Composantes

qui tendent à écarter de la position d'équilibre

force de rappel suivant $\vec{u}_z$

La position d'équilibre O est donc stable pour les mouvements suivant $(0, \vec{u}_z)$, mais instable pour les mouvements suivant $(0, \vec{u}_x)$ ou $(0, \vec{u}_y)$
 $\Rightarrow$ globalement instable.

2^e méthode : On étudie la dérivée seconde de $\mathcal{H}_{Ep}$:

$\frac{\partial \mathcal{H}_{Ep}}{\partial x} = -\frac{eV_0}{d^2} x$	$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{Ep}}{\partial x^2} \right _{x=0} = -\frac{eV_0}{d^2} < 0$	} instables
$\frac{\partial \mathcal{H}_{Ep}}{\partial y} = -e \frac{V_0}{d^2} y$	$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{Ep}}{\partial y^2} \right _{y=0} = -\frac{eV_0}{d^2} < 0$	
$\frac{\partial \mathcal{H}_{Ep}}{\partial z} = +2e \frac{V_0}{d^2} z$	$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{Ep}}{\partial z^2} \right _{z=0} = +\frac{2eV_0}{d^2} > 0$	} stable

On retrouve les résultats précédents.

Partie 2 : Mouvement longitudinal et mouvement transverse

Système : un électron Réf. du labo. supposé galiléen.
 L'électron n'est soumis qu'à la force $\vec{F}$.

On applique la 2^e loi de Newton : $m_e \vec{a} = \vec{F}$

On en déduit par projection :

$m_e \ddot{x} = A x$
$m_e \ddot{y} = A y$
$m_e \ddot{z} = -2A z$

③ Mouvement longitudinal (étude suivant (Oz)).

$$m_e \ddot{z} + 2A z = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{2A}{m_e} z = 0$$

$$\text{On pose } \omega_L = \sqrt{\frac{2A}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e d^2}}$$

(3)

z vérifie une équation différentielle harmonique :

$$\ddot{z} + \omega_L^2 z = 0$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e d^2}}$$

on retrouve $z=0$ à l'équilibre

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 6}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 5^2 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-19}}{5^2 \times 10^{-37}}} = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot 10^9$$

$$\omega_L = 2,8 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$$

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi}$$

$$f_L = 4,6 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

On a alors $z(t) = z_0 \cos(\omega_L t + \varphi)$ z_0 et φ = déterminées par les CI.
Le mouvement de z est donc périodique de fréquence f_L .

④ Mouvement transverse

On projette le PFD sur $(O \hat{x}$ et $\hat{y})$:

$$m_e \ddot{x} = +eAx$$

$$\ddot{x} - \frac{eA}{m_e} x = 0$$

$$m_e \ddot{y} = +eAy$$

$$\ddot{y} - \frac{eA}{m_e} y = 0$$

$$\text{On pose } \Omega = \sqrt{\frac{eA}{m_e}} = \sqrt{\frac{eV_0}{m_e d^2}}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - \Omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} - \Omega^2 y = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont du type :

$$x(t) = X_1 e^{+\Omega t} + X_2 e^{-\Omega t}$$

$$y(t) = Y_1 e^{+\Omega t} + Y_2 e^{-\Omega t}$$

X_1, X_2, Y_1, Y_2 constantes déterminées par les CI.

Dès que x_1 ou y_1 sont différentes de 0, les solutions divergent ce qui confirme que le système est instable.

Partie 3 = Confinement magnétique

⑤ Conservation de la vitesse

Système = un électron Labo supposé galiléen.

Force = $\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}_0$ (Poids négligé).

On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = 0$$

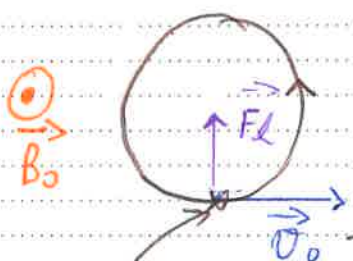
d'où $E_c = \text{cte}$ donc $\frac{1}{2} m v^2 = \text{cte}$

La vitesse se conserve = $\forall t \quad v = v_0$.

⑥ Trajectoire

$$\vec{F}_L = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

↳ indique la concavité de la trajectoire.



Position initiale

→ vitesse tangente à la trajectoire.

Expression du rayon = on applique le PFD à l'électron dans Labo galiléen

$$m \vec{a} = \vec{F}_L$$

en projection sur $\vec{e}_r = - m e R \dot{\theta}^2 = - e (\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{e}_r$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R}$$

$$\rightarrow v_0 \vec{e}_\theta$$

d'où $m_e \frac{v_0}{R} = e v_0 B_0$

$$R = \frac{m_e v_0}{e B_0}$$

⑦ Pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{e B_0}{m_e}$

$$\frac{v_0}{R} = \frac{e B_0}{m_e} = \dot{\theta} = \omega_c \quad \omega_c \text{ est la vitesse angulaire}$$

$$\omega_c = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 6}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$$

$$\omega_c = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$$

$$R = 10 \text{ } \mu\text{m}$$

$$v_0 = \frac{R e B_0}{m_e}$$

$$v_0 = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

On a $v_0 \ll c$: l'électron n'est pas relativiste.
 $\Rightarrow$ cela valide l'étude avec les lois de la mécanique classique.

⑧ Expression de u

$$u(t) = R \cos(\omega_c t) + i R \sin(\omega_c t) = R e^{i \omega_c t}$$

$$u(t) = R e^{i \omega_c t}$$

pour une trajectoire circulaire de rayon R et de pulsation ω_c .

Partie 4 : Mouvement dans le piège de Penning

⑨ La composante magnétique de la force de Lorentz est orthogonale à (Oz) car $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$.

Le mouvement envisagé partie 2 n'est donc pas modifié. (l'éq. diff reste identique).

On a donc toujours des oscillations sinusoïdales suivant (O_z) , de fréquence $f_L = 46 \text{ THz}$.

⑩ Equations différentielles

L'électron est soumis à la somme des 2 forces précédentes. Le PFD donne :

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_L$$

On obtient en projection :

$$\begin{cases} m_e \ddot{x} = \frac{eV_0}{d^2} x - eB_0 \dot{y} \\ m_e \ddot{y} = \frac{eV_0}{d^2} y + eB_0 \dot{x} \\ m_e \ddot{z} = -2 \frac{eV_0}{d^2} z \end{cases}$$

On pose $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ et $\omega_L^2 = \frac{2eV_0}{m_e d^2}$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad \ddot{x} = \frac{1}{2} \omega_L^2 x - \omega_c \dot{y} \\ \textcircled{2} \quad \ddot{y} = \frac{1}{2} \omega_L^2 y + \omega_c \dot{x} \end{cases} \quad \text{Système d'eq. diff. couplées}$$

⑪ $u = x + i y$

$\ddot{u} = \ddot{x} + i \ddot{y}$ et $\ddot{u} = \ddot{x} + i \ddot{y}$

$\ddot{u} = \textcircled{1} + i \textcircled{2}$

$$\ddot{u} = \omega_L^2 (x + i y) + \omega_c \underbrace{(i \dot{x} - \dot{y})}_{\omega_c i (x + i y)}$$

$$\ddot{u} = \frac{1}{L} \omega_L^2 u + i \omega_c \dot{u}$$

$$\ddot{u} - i \omega_c \dot{u} - \frac{\omega_L^2}{L} u = 0$$

Résolution =

Eq. caractéristique : $\pi^2 - i \omega_c \pi - \frac{\omega_L^2}{L} = 0$

$$\Delta = -\omega_c^2 + 4 \frac{\omega_L^2}{L} \quad \text{avec} \quad \omega_L \ll \omega_c$$

$$\Delta < 0$$

les racines sont complexes conjuguées =

$$\pi = \frac{1}{2} \left(i \omega_c \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_c^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{L}}}_{\text{proche de } \omega_c} \right)$$

On pose alors $\omega'_c = \frac{1}{2} \left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{L}} \right)$

$$\omega_\pi = \frac{1}{2} \left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{L}} \right)$$

On peut alors exprimer u =

$$u(t) = \underline{u}_1 e^{i \omega'_c t} + \underline{u}_2 e^{i \omega_\pi t}$$

où $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ sont 2 constantes complexes déterminées par les c.i.

L'expression de ω traduit donc la superposition de 2 mouvements de rotation de rayon et de vitesse angulaire respectifs $(|\underline{U}_1|, \omega_c)$ et $(|\underline{U}_2|, \omega_\pi)$.

(12) Rotations ω_c et ω_π

$$\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_c^2} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2\omega_c^2}{\omega_c^2}} \ll 1$$

on $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

d'où $\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_c^2} \approx \omega_c \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2}\right)$

On reporte dans l'expression de ω_c et ω_π :

$$\omega_c \approx \omega_c \left(1 - \frac{\omega_c^2}{2\omega_c^2}\right)$$

$$\omega_c \approx 1,1 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$$

$$\omega_\pi \approx \frac{\omega_c^2}{2\omega_c}$$

$$\omega_\pi \approx 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

(13) Les électrons ne restent confinés que si $\Delta < 0$, sinon les solutions comporteraient des termes en $\exp(\pm \Omega' t)$ qui pourraient diverger.

il faut donc $-\omega_c^2 + 2\omega_c^2 < 0 \quad \omega_c^2 > 2\omega_c^2$

$$\left(\frac{eB_0}{m_e}\right)^2 > \frac{4eV_0}{m_e d^2}$$

$$B_0^2 > \frac{4m_e V_0}{e d^2}$$

d'où $B_0 > B_{\min}$ avec

$$B_{\min} = \sqrt{\frac{4m_e V_0}{e d^2}}$$

$$B_{\min} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ T}$$

14) Mouvement transverse

$$\omega_{\pi} \ll \omega_c$$

$$T_{\pi} \gg T_c$$

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

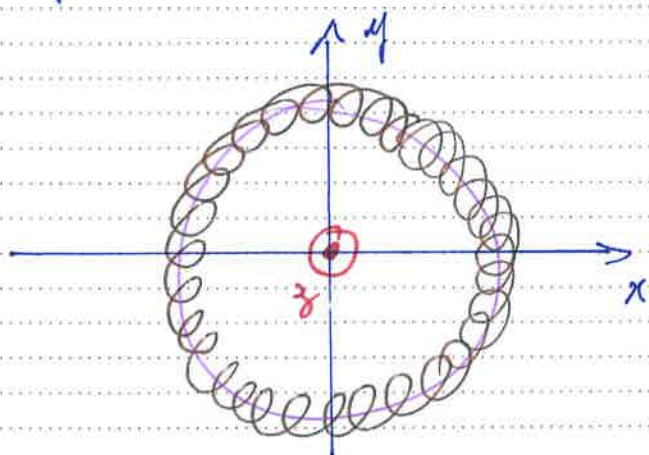
$$T_{\pi} = \frac{2\pi}{\omega_{\pi}}$$

$$u(t) = \underline{u}_1 e^{i\omega_c t} + \underline{u}_2 e^{i\omega_{\pi} t}$$

* A l'échelle de temps T_c , le terme $\underline{u}_2 e^{i\omega_{\pi} t}$ ne varie pratiquement pas.

↳ l'électron semble alors décrire un cercle de rayon $|\underline{u}_1|$ autour du centre $\underline{u}_2 e^{i\omega_{\pi} t}$ (et à la vitesse angulaire ω_c).

* A l'échelle de temps T_{π} , l'électron semble décrire un cercle de rayon (moyen) $|\underline{u}_1|$ et à la vitesse angulaire ω_{π} .



L'image montre la trajectoire réelle superposition du mouvement transverse et du mouvement longitudinal :

→ oscillations sinusoïdales suivant O_z

→ successions de petits cercles (d'axe O_z) dont les centres décrivent un cercle (rayon $|\underline{u}_2|$ pulsation ω_{π}).

Satellite de télédétection terrestre

① Force d'interaction gravitationnelle

$\vec{F} = -G \frac{m \pi_T}{0\pi^2} \cdot \frac{0\pi}{0\pi}$
 de plus $g_0 = \frac{G \pi_T}{R_T^2}$ (à la surface de la Terre)
 $\vec{F} = m \vec{g}_0$
 $\vec{F} = -m g_0 R_T^2 \frac{0\pi}{0\pi^3}$ force toujours attractive
 $K = m g_0 R_T^2$

② Force conservative

$\vec{F} = -\frac{K}{\pi^2} \vec{e}_r$ $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$\delta W = -\frac{K}{\pi^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + d\vec{l}_\perp)$ $d\vec{l}_\perp \cdot \vec{e}_r = 0$

$\delta W = -K \frac{dr}{\pi^2} = -d\left(-\frac{K}{\pi}\right)$ $E_p(\pi) = -\frac{K}{\pi} + \text{cte}$

La force est bien conservative.

③ Moment cinétique 2 méthodes : PPC ou on dérive.

$\vec{L}_0 = 0\pi \wedge \vec{p} = 0\pi \wedge m \vec{v}$

PPC à $\pi(m)$ dans R géocentrique galiléen :

$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \underbrace{0\pi \wedge \vec{F}}_{\text{colinéaires}} = \vec{0}$ d'où $\vec{L}_0 = \text{vecteur constant.}$

Hk $\vec{L}_0 = \vec{O\Pi} \wedge m \vec{\sigma}$

$\vec{O\Pi}$ est toujours orthogonal au vecteur $\vec{L}_0$ constant.
 ainsi Π peut se déplacer que dans le plan orthogonal
 à $\vec{L}_0$ passant par O
 $\Rightarrow$ mer plan

④ Expression de $\vec{L}_0$ $\vec{O\Pi} = \pi \vec{u}$

$\vec{\sigma} = \dot{\pi} \vec{u} + \pi \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$\vec{L}_0 = m \pi^2 \dot{\theta} \vec{k}$

⑤ On applique le TET au satellite dans R géocentrique
 galiléen

la seule force ext est conservative

d'où $E_m = \text{cte}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \sigma^2 + E_p(\pi) = \frac{1}{2} m \dot{\pi}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \pi^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)}_{E_{\text{eff}}}$

$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m \pi^2 \dot{\theta}^2 - \frac{K}{\pi}$

~~E_{eff}~~

$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m \pi^2} - \frac{K}{\pi}$

$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m \pi^2} - \frac{m g_0 R_T^2}{\pi}$

* On a toujours $E_m \geq E_{\text{eff}}$

$E_{m1} = \text{état de diffusion}$ trajectoire hyperbolique

$E_{m2} = \text{état lié}$ = traj. elliptique.

La trajectoire est circulaire si $\pi = \text{cte}$
il faut $E_m = E_{m,0}$

⑥ Mouvement circulaire

plusieurs méthodes on a déjà montré que $L_0 = \text{cte}$

$$L_0 = m \pi^2 |\dot{\theta}| \quad \text{or si } \pi = \text{cte} \quad \text{alors } |\dot{\theta}| = \text{cte}$$

$\Rightarrow$ movt uniforme.

$$\sigma^2 = \pi^2 \dot{\theta}^2$$

On applique le PFD au satellite

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad - m \pi \dot{\theta}^2 = - m \frac{g_0 R_T^2}{\pi^2}$$

$$\text{d'où } \boxed{v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{\pi}}}$$

⑦ Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m \sigma^2 = \frac{1}{2} m \frac{g_0 R_T^2}{\pi}$$

$$E_m = E_c + E_p = - \frac{1}{2} m \frac{g_0 R_T^2}{\pi} < 0 \quad \text{état lié.}$$

$$\textcircled{8} \Delta N = E_{mb} = -100 \text{ GJ}$$

$$E_{mh} = -80 \text{ GJ}$$

⑨ en P et en A le rayon est min / max

d'où $\ddot{\pi} = 0$

$$a = \frac{\pi_b + \pi_h}{2}$$

⑩ Energie mécanique

$$\text{en P} \quad E_m = \left(\frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m \pi_b^2} - m \frac{g_0 R_T^2}{\pi_b} \right) \times \pi_b^2$$

$$\text{en A} \quad E_m = \left(\frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m \pi_h^2} - m \frac{g_0 R_T^2}{\pi_h} \right) \times \pi_h^2$$

$$E_m \pi_b^2 + m g_0 R_T^2 \pi_b - \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m} = 0$$

$$E_m \pi_h^2 + m g_0 R_T^2 \pi_h - \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m} = 0$$

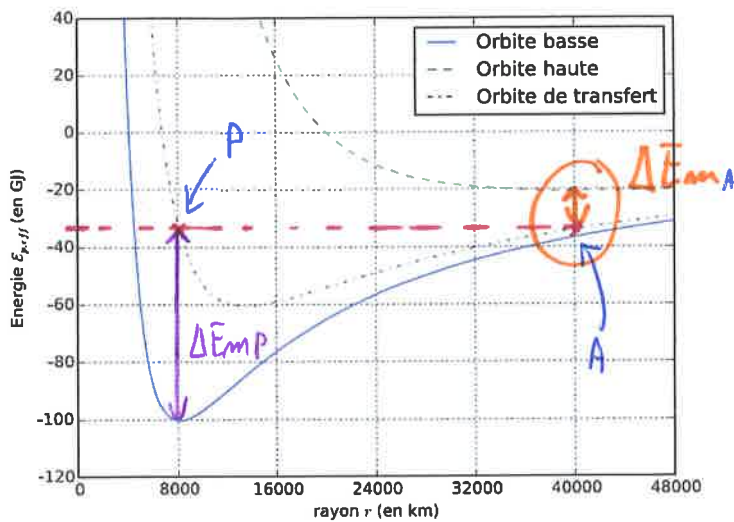
On reconnaît un polynôme du 2nd degré dont les racines sont π_b et π_h

Le coefficient devant le terme d'ordre 1 est proportionnel à la somme des racines

$$\text{d'où } \pi_b + \pi_h = - \frac{m g_0 R_T^2}{E_m}$$

$$E_m = \frac{-m g_0 R_T^2}{2a}$$

$$E_m = \frac{-K}{2a}$$



On lit :

$$E_{mb} = -100 \text{ GJ}$$

$$E_{mh} = -20 \text{ GJ}$$

⑬ On lit $\Delta E_{mp} = 65 \text{ GJ}$

$$m = \frac{\Delta E_{mp}}{P_c}$$

$$m = \frac{65 \cdot 10^3}{50}$$

$$m = 1300 \text{ kg}$$

⑭ Période $T =$

$$2\pi r = v \times T$$

$$T = 2\pi \frac{r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{\pi}{g_0 R_T^3}}$$

$$T = 2\pi \left(\frac{r^3}{g_0 R_T^3} \right)^{1/2} \quad 3^e \text{ loi de Kepler -}$$

$$TET = \frac{dE_m}{dt} = - \vec{F}_f \cdot \vec{v} = - d v^2 \quad \text{on remplace par les expressions}$$

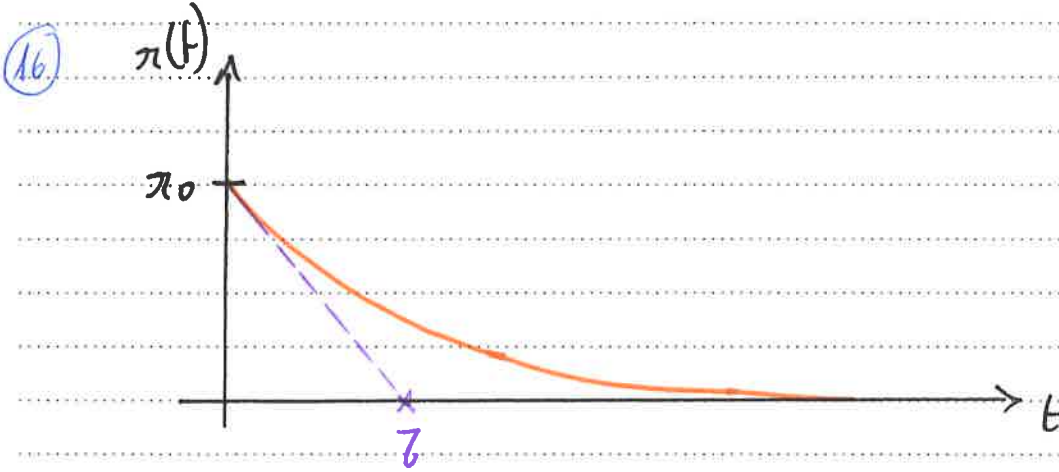
$$+ \frac{\cancel{v}}{2r^2} \frac{dr}{dt} = - d \frac{\cancel{v}}{m \pi}$$

$$\frac{dr}{dt} + \frac{2d}{m} \pi = 0$$

$$2 = \frac{m}{2d}$$

⑤ Résolution de l'éq. diff :

$$\pi(t) = \pi_0 e^{-t/\tau}$$



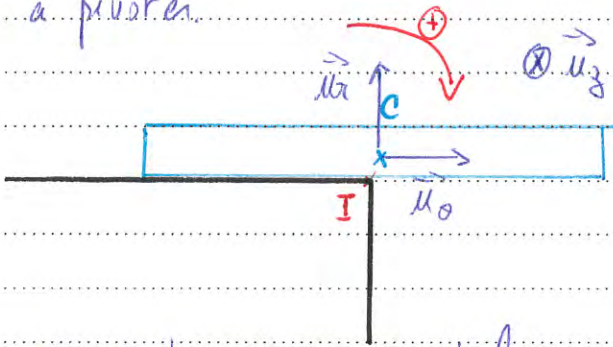
Petit Déj et tartine beurrée

①

① Début du mouvement

La tartine commence à basculer quand, suite à une perturbation, le centre de gravité I passe à droite de la verticale passant par I .

A ce moment-là, le moment du poids est selon $\vec{u}_z$ tout comme le moment de la réaction de la table sur la tartine. L'équilibre est rompu, la tartine commence à pivoter.



② Système conservatif

La tartine pivote autour de l'axe (Δ) .

Elle est soumise à son poids (force conservative) et à la réaction du support $\vec{R} = T\vec{u}_0 + N\vec{u}_x$.

Le contact de la tartine avec la table se fait sur l'arête I (Δ).
La vitesse du point de contact par rapport à la table est donc nulle.
 $\vec{R} \cdot \vec{v}(I/R) = 0$ $\vec{R}$ ne travaille pas.

de plus $\vec{R}$ s'applique en $I \Rightarrow$ son moment $\vec{M}_I(\vec{R}) = \vec{0}$.

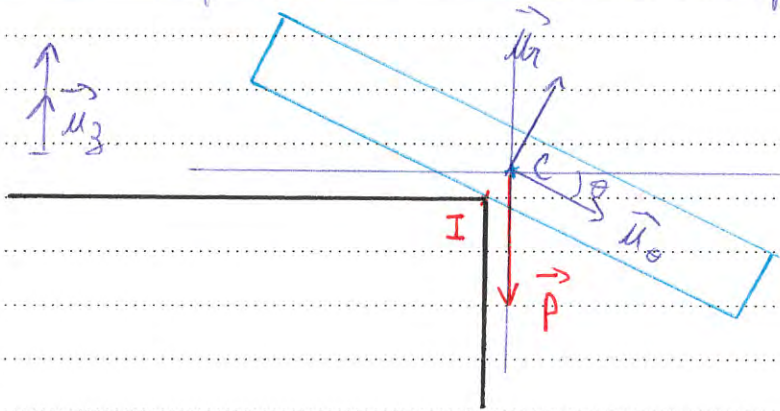
Toutes les forces qui travaillent sont conservatives.

Le réf. lié à la table est supposé galiléen.

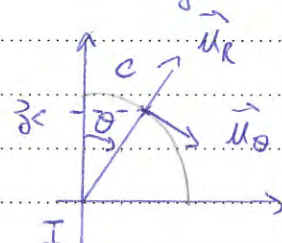
TED à la tartine $\Rightarrow E_{\text{m}} = \text{cte}$

La tartine est un système conservatif.

③ Par définition - $E_m = E_c + E_p$ $E_c = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2$



C décrit un cercle de rayon b autour de I



$z_c = b \cos \theta$ d'où $E_p = m g z_c = m g b \cos \theta$

Bilan

$$\frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + m g b \cos \theta \stackrel{CI}{=} m g b \quad (1)$$

Quand $\theta \rightarrow 0$, $E_p \searrow$ et $\dot{\theta}^2 \nearrow$

On dérive cette égalité par rapport à t pour obtenir l'éq. diff du mouvement :

$$I_A \ddot{\theta} - m g b \sin \theta = 0$$

$\ddot{\theta} \neq 0$

$$I_A \ddot{\theta} - m g b \sin \theta = 0 \quad (2)$$

↳ l'équilibre est instable.

4. Expression de N et T

On applique le théorème du centre d'inertie à la tartinade dans le réf. lié à la table supposé galiléen. C décrit un cercle.

$$\vec{a}_c = -b \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + b \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$m \vec{a}_c = m \vec{g} + T \vec{u}_\theta + N \vec{u}_r$$

avec $m \vec{g} = -m g \cos \theta \vec{u}_r + m g \sin \theta \vec{u}_\theta$

$$\begin{cases} -m b \ddot{\theta}^2 = -m g \cos \theta + N \\ +m b \ddot{\theta} = m g \sin \theta + T \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} N = m g \cos \theta - m b \ddot{\theta}^2 \\ T = m b \ddot{\theta} - m g \sin \theta \end{cases}$$

de plus, en utilisant les résultats de la questions précédente on peut exprimer $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ et injecter les expressions dans N et T .

$$① \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2 m g b}{I_A} (1 - \cos \theta) \geq 0$$

$$② \quad \ddot{\theta} = \frac{m g b}{I_A} \sin \theta$$

$$\begin{cases} N = m g \cos \theta - \frac{2 m^2 b^2}{I_A} g (1 - \cos \theta) \\ T = m g \sin \theta \left(\frac{m b^2}{I_A} - 1 \right) \end{cases} \quad \text{et } I_A = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$$

$$\begin{aligned} N &= m g \left(\cos \theta - \frac{6 b^2}{a^2 + b^2} (1 - \cos \theta) \right) \\ T &= m g \sin \theta \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$AN = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \approx \frac{0,4^2}{4^2 + 0,4^2} \approx \left(\frac{0,4}{4} \right)^2 = \frac{1}{100}$$

$$\frac{b^2}{a^2 + b^2} \approx$$

$$\text{car } b^2 \ll a^2$$

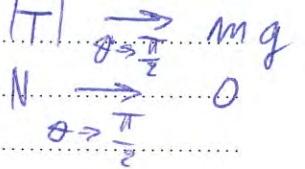
On peut alors simplifier N et T

$$N \approx m g \cos \theta \quad T \approx -m g \sin \theta$$

$$\text{et } |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

⑤ il n'y a pas glissement tant que $|T| \leq f N$
où f est le coefficient de frottement.

or quand θ augmente $|T|$ augmente et N diminue



il y a alors forcément un angle θ_0 tel que

$$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad |T| = f N$$

$$mg \sin \theta_0 = f mg \cos \theta_0$$

Il y aura forcément glissement avant que la tartine ne quitte la table.

⑥ Coefficient de frottement f

à la limite du glissement $mg \sin \theta_0 = f mg \cos \theta_0$

$$f = \tan \theta_0 \quad \text{et} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad \boxed{f = 1}$$

⑦ Calcul de $\dot{\theta}_0$

$$\dot{\theta}_0^2 = \frac{6gb}{a^2 + b^2} (1 - \cos \theta_0) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{6gb}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{6 \times 10}{100 \times 0,4 \times 10^2} (1 - 0,7)} = \sqrt{\frac{3 \times 6}{4} \times 10} = \sqrt{\frac{9}{4} \times 10}$$

$$\dot{\theta}_0 = 6,7 \text{ rad/s}$$

⑧ La tartine est en chute libre $z_c = -g$

$$z_c = -gt \quad z_c(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{avec l'origine à la position initiale.}$$

chute sur une hauteur h

$$h = \frac{1}{2} g t_h^2$$

$$t_h = \sqrt{2h/g}$$

(on néglige b devant h)

$$t_h = \sqrt{2 \times \frac{0,7}{10}}$$

$$t_h \approx 0,37 \text{ s}$$

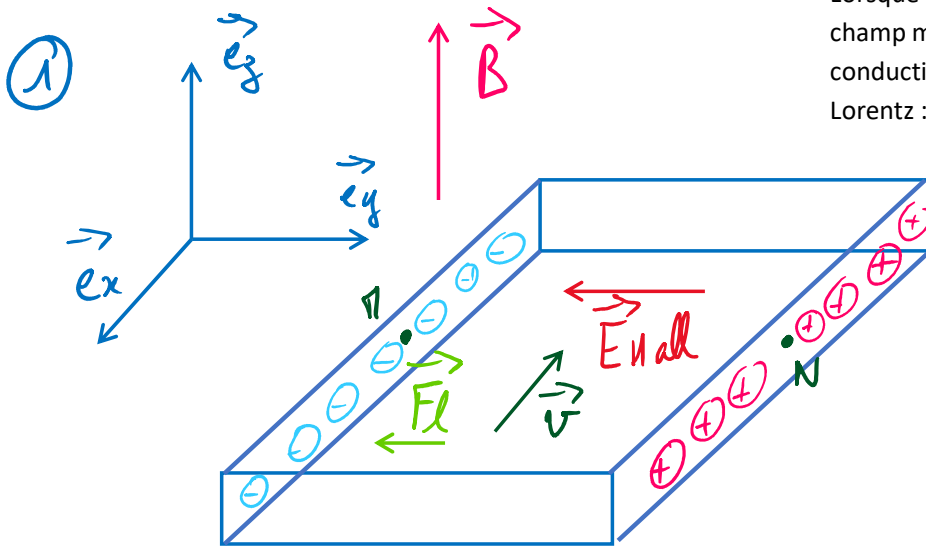
④ Angle $\theta = \dot{\theta}_0$

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta \theta \quad \theta(t_h) \approx 6,7 \times 0,37 + \frac{\pi}{4} \approx 3,25 \text{ rad}$$

$$\theta(t_h) = 187^\circ$$

La tartine retombe sur la face opposée.



Lorsque la plaquette est plongée dans le champ magnétique, les électrons de conduction sont alors soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_L = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Les électrons ont au départ une vitesse suivant $-\vec{e}_x$
 $\Rightarrow$ ils vont donc être déviés suivant $-\vec{e}_y$, c'est-à-dire vers la gauche. La face gauche de la plaquette se charge alors négativement. Au niveau de la face droite, il y a alors un déficit d'électrons $\Rightarrow$ cette face sera chargée positivement.

② Le champ de Hall est orienté suivant les potentiels décroissants c'est-à-dire des charges $\oplus$ vers les charges $\ominus$.

③ On est à nouveau en régime permanent. Le courant I est suivant $\vec{e}_x$ = les électrons ont donc un mouvement rectiligne suivant $-\vec{e}_x$

Ainsi, en appliquant le PFD à 1 électron dans le réf. du labo supposé galiléen en projection sur $\vec{e}_y$, on doit avoir :

$$m \ddot{y} = \vec{F}_L \cdot \vec{e}_y = \underbrace{-e \vec{v} \wedge \vec{B}}_{\vec{F}_{mag}} \cdot \vec{e}_y = \underbrace{-e \vec{E}_{Hall}}_{\vec{F}_e} \cdot \vec{e}_y$$

$= 0$ car mv suit $\vec{e}_x$

Les 2 forces se compensent.

④ Analyse dimensionnelle : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = n |q| \sigma ab$

* $I = \frac{dq}{dt}$ d'où $I = \frac{[Q]}{T}$

* $[n |q| \sigma ab] = \frac{1}{L^3} [Q] \times L \cdot T^{-1} \times L^2 = \frac{[Q]}{T}$

} Expression homogène

⑤ Expression de E_{Hall}

D'après la question ③ $\vec{F}_e + \vec{F}_q = \vec{0}$

En passant en norme : $e E_{Hall} = e \sigma B$

de plus $I = n e \sigma ab$

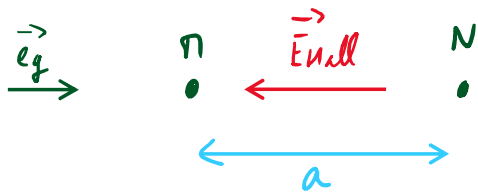
$$E_{Hall} = \frac{IB}{neab}$$

⑥ Tension U_{Hall}

$$U_{Hall} = V_N - V_P = \int_{PN} dV = \int_{PN} -\vec{E}_{Hall} \cdot d\vec{l} = \int_{PN} \vec{E}_{Hall} d\vec{l}$$

$$U_{Hall} = a E_{Hall}$$

$$U_{Hall} = \frac{IB}{neb}$$



⑦ a) Si $\vec{B}$ est suivant $\vec{e}_y$, ce sont les faces horizontales de la plaquette qui se chargent. Le champ de Hall sera suivant $\vec{e}_z$. La tension de Hall dépendra de la largeur a :

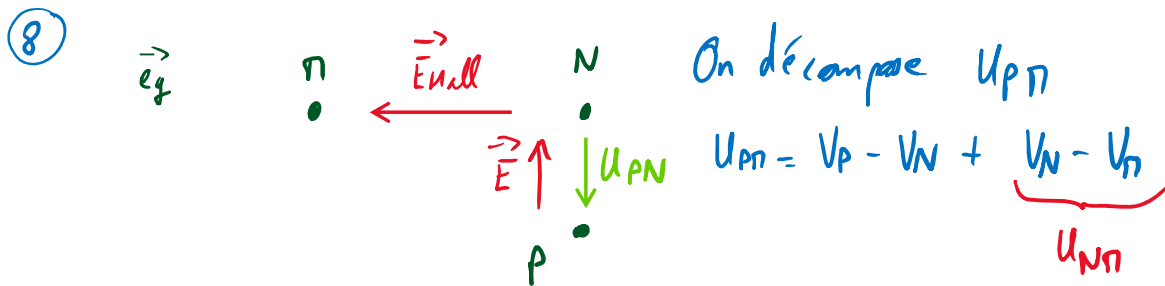
$$U_{Hall} = \frac{IB}{nea}$$

Comme $a \gg b$, la tension de Hall sera beaucoup plus petite que la tension déterminée à la question précédente.

- b) si $\vec{B}$ est suivant $\vec{e}_x$, $\vec{E}_H = \vec{0}$ = les électrons ne sont pas déviés.
Le champ de Hall est nul et donc la tension de Hall sera nulle aussi.

$$U_{\text{Hall}} = 0$$

- c) Pour mesurer précisément B , il faut placer la plaquette perpendiculairement à $\vec{B}$ comme sur la figure en début de pb.



Les électrons sont mis en mouvement par la présence d'un champ électrique $\vec{E}$ (colinéaire à $\vec{e}_x$).

On applique la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\text{et } \vec{j} = nq\vec{v} = ne v \vec{e}_x$$

suivant $\vec{e}_x$: $ne v \vec{e}_x = \gamma \vec{E}_x \vec{e}_x$ et $\Sigma = neab$ ou

$$\text{d'où } E_x = \frac{I}{\gamma ab} \quad \text{et } U_{PN} = \int_{NP} dV = \int -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_x d$$

$$U_{PN} = \frac{-Id}{\gamma ab}$$

$$\textcircled{9} \quad U_{PN} = \frac{-Id}{\gamma ab} + \frac{BI}{ne b} = \frac{BI}{ne b} \left(1 - \frac{med}{B\gamma a} \right)$$

$$\left| \varepsilon = \frac{med}{\gamma a B} \right|$$

Pour minimiser ε , il faut m petit ou γ grand (les autres paramètres étant fixés).

- ⑩ Applications = Talemètre (mesure de B) ou pince ampéremétrique (mesure de I).