

Compo de Physique

4 heures - Calculatrice interdite

Tous les problèmes sont indépendants. Certaines questions sont aussi indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Consignes

- Lisez le sujet en intégralité avant de commencer.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut-être utilisé pour des questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- **Encadrez vos résultats, et soulignez les applications numériques en couleur.**
- **Tout résultat non homogène entraînera un retrait de point.**
- Tout schéma plus petit que votre carte d'étudiant sera invisible.
- Scannez vos copies dans l'ordre !



Problème 1 : Piège de Penning

durée conseillée : 1h à 1h30

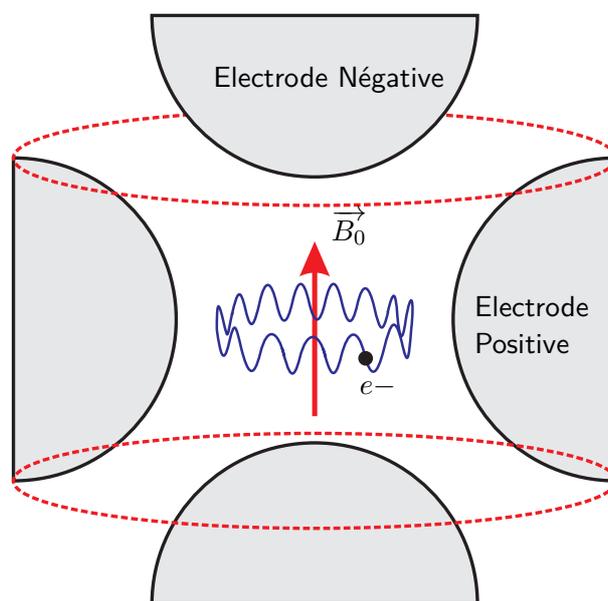
On cherche à piéger un électron dans le vide en lui appliquant un champ électromagnétique. Ce confinement est obtenu au moyen d'un dispositif nommé piège de Penning.

Ce dispositif permet de confiner une particule chargée dans un espace réduit au moyen des actions conjuguées d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Il est particulièrement adapté à la mesure précise des propriétés des ions et des particules subatomiques stables possédant une charge électrique. C'est le physicien F.M. Penning qui en eut l'idée originale en 1936, mais le mérite de sa mise en œuvre concrète revient au physicien Hans Dehmelt.

Données numériques :

- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Le référentiel d'étude est celui du laboratoire supposé galiléen. On utilisera un repère cartésien orthonormé direct $(0, x, y, z)$ muni de sa base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. L'origine O du repère est fixée au centre du dispositif.



Partie n°1: Rôle des électrodes

On admet que les électrodes (voir schéma) produisent un potentiel électrique $V(x, y, z)$ dit quadrupolaire et d'expression :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad \text{où } V_0 = 6,0 \text{ V et } d = 5,0 \text{ mm.}$$

Le champ électrique \vec{E} est produit par deux coupelles chargées négativement et par une électrode circulaire chargée positivement.

Le champ magnétique uniforme \vec{B}_0 est produit par un électro-aimant toroïdal non représenté sur la figure. La direction de \vec{B}_0 correspond à l'axe (Oz) .

1. Le champ électrique \vec{E} produit par ce système d'électrode est relié au potentiel électrique par :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ symbolise la dérivation partielle par rapport à la variable x . Cette opération consiste à dériver une fonction de plusieurs variables (x, y, z) en considérant que seule x est variable, les deux autres quantités y et z étant considérées comme constantes. La définition des opérateurs $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ est évidemment analogue.

Déterminer la force électrique s'appliquant à l'électron quand il occupe une position $M(x, y, z)$ en montrant qu'elle s'écrit sous la forme

$$\vec{F} = A.x \vec{u}_x + A.y \vec{u}_y - 2A.z \vec{u}_z$$

où A est une grandeur constante positive que l'on exprimera en fonction de m_e , V_0 et d .

2. Quelle sera la position d'équilibre de cet électron ? Discuter la stabilité de cet équilibre en distinguant les mouvements selon les 3 axes (Ox) , (Oy) et (Oz) en l'absence de champ magnétique.

Partie n°2: Mouvement longitudinal et mouvement transverse

On nomme désormais mouvement longitudinal le mouvement projeté sur l'axe (Oz) et mouvement transverse le mouvement projeté dans le plan (Oxy). On considère pour l'instant une situation où le champ magnétique n'est pas activé.

3. Montrer que le mouvement longitudinal selon l'axe (Oz) est décrit par une équation de forme :

$$\ddot{z} + \omega_L^2 z = 0.$$

Identifier et calculer numériquement la quantité ω_L . Montrer que le mouvement ainsi décrit est périodique et donner sa fréquence.

4. Exprimer de même les équations décrivant le mouvement transverse. Ce mouvement est-il borné? Quelle forme de solution aurait-on pour $x(t)$ et $y(t)$? On notera $\Omega = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}$.

Partie n°3: Confinement magnétique

On considère dans cette partie le cas d'un électron qui ne serait soumis qu'au seul champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. L'électron est supposé introduit dans ce champ avec une vitesse initiale de norme v_0 , de direction orthogonale à (Oz).

5. Montrer que la vitesse de l'électron va se conserver sur ce mouvement.

6. On admet que la trajectoire suivie par l'électron dans ces conditions est une trajectoire circulaire, dans le plan (Oxy). On pourra introduire une base cylindro-polaire ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$). Représenter la situation en indiquant clairement le sens du champ magnétique B_0 ainsi que le sens de rotation de l'électron sur sa trajectoire.

Etablir l'expression du rayon R de cette trajectoire en fonction de m , e , v_0 et B_0 .

7. On nomme pulsation cyclotron la quantité $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$. Que représente cette quantité vis à vis du mouvement circulaire envisagé? Calculer numériquement ω_c pour $B_0 = 6,0$ T.

Quelle sera la vitesse de l'électron si le rayon de la trajectoire vaut $R = 10 \mu\text{m}$? Commenter.

8. Ce mouvement circulaire peut être décrit dans le système de coordonnées cartésiennes par les équations paramétrées $x(t) = R \cdot \cos(\omega_c t)$ et $y(t) = R \cdot \sin(\omega_c t)$ (en choisissant une origine des temps convenable).

En introduisant le plan complexe tel que l'axe réel se confonde avec l'axe (Ox) et l'axe imaginaire avec l'axe (Oy), la position M de l'électron peut aussi être repérée par son affixe $u(t) = x(t) + iy(t)$. Exprimer $u(t)$.

Partie n°4: Mouvement dans le piège de Penning

On considère dans cette partie un électron soumis à la fois au champ électrique quadrupolaire des parties 1 et 2 et au champ magnétique envisagé dans la partie 3.

9. Quel sera le mouvement longitudinal?

10. Ecrire les équations différentielles du mouvement transverse portant sur les variables $x(t)$ et $y(t)$ en utilisant les paramètres ω_L et ω_c introduits précédemment.

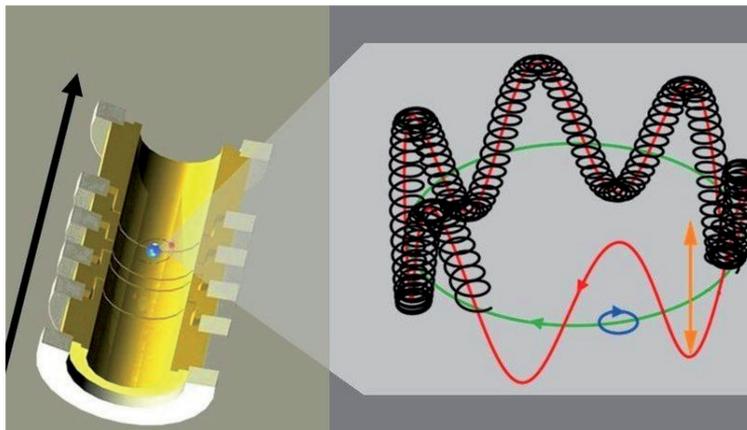
11. En introduisant l'affixe $u(t) = x(t) + iy(t)$, montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{u} - i\omega_c \dot{u} - \frac{\omega_L^2}{2} u = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle, en tenant compte des valeurs numériques fournies. Interpréter les termes solution en utilisant les résultats de la question 8.

12. Le mouvement transverse est alors composé de deux mouvements périodiques de pulsations ω'_c et ω_M avec $\omega_M \ll \omega'_c$. Exprimer ω'_c et ω_M sous forme approchée compte-tenu des valeurs numériques précédentes. On rappelle la formule approchée quand $\varepsilon \ll 1$: $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon/2$. Calculer numériquement ω'_c et ω_M .

13. Montrer que la champ magnétique n'amène un confinement de la particule dans le piège que pour une valeur minimale $B_{0\min}$ de B_0 que l'on évaluera.
14. Décrire le mouvement transverse de l'électron à l'échelle de temps $T'_c = \frac{2\pi}{\omega'_c}$. Comment évolue ce mouvement à l'échelle de temps $T_M = \frac{2\pi}{\omega_M}$? Tracer une allure du mouvement projeté dans le plan Oxy . Commenter l'image ci-dessous.



Problème 2 : Satellite de télédétection terrestre

durée conseillée : 1h à 1h30

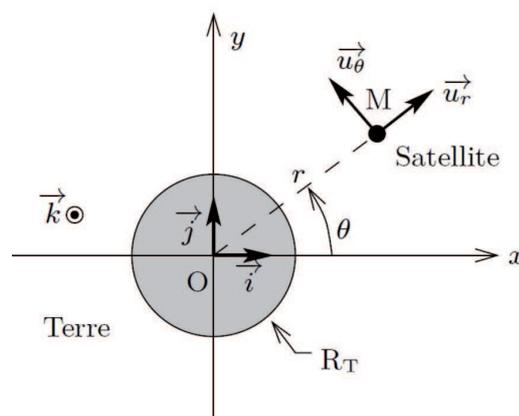
La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et cartographie. Nous étudions dans ce problème un satellite de télédétection assimilé à un point matériel M de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg en orbite autour de la Terre de centre O et de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g supposé galiléen.

Partie n°1: Préliminaires

On rappelle que l'interaction \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite peut s'écrire $\vec{F} = -K \frac{\vec{OM}}{OM^3}$.

Dans la suite, sauf indication contraire, on supposera que le satellite est soumis uniquement à la force \vec{F} .



1. On note $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ la norme du champ de gravitation à la surface de la Terre. Rappeler l'expression de la constante K en fonction de g_0 , m , et R_T . Cette force \vec{F} est-elle attractive ou répulsive?
2. Montrer que cette force est conservative et exprimer son énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ avec $r = OM$.
3. Montrer que le moment cinétique en O noté \vec{L}_0 est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement du satellite est plan.

Dans toute la suite, les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

4. Déterminer l'expression du moment cinétique par rapport à O dans la base cylindrique en fonction de r , $\dot{\theta}$ et m .
5. Justifier que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et montrer qu'elle se met sous la forme :

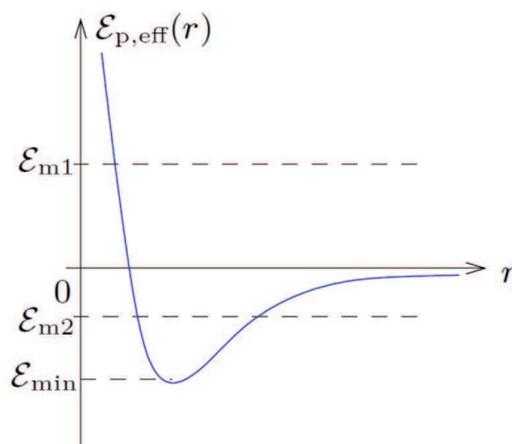
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p\text{eff}}(r)$$

où $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ est l'énergie potentielle effective à exprimer en fonction de $\mathcal{L}_0 = \|\vec{\mathcal{L}}_0\|$, m , g_0 , R_T et r .

Le graphe $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ pour une valeur donnée de \mathcal{L}_0 est représenté ci-contre. On admet que la trajectoire est nécessairement conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

A quelle énergie \mathcal{E}_{m1} ou \mathcal{E}_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ? Justifier.

Pour quelle valeur particulière de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m la trajectoire est-elle circulaire ?



Partie n°2: Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite du satellite se fait en deux étapes :

- phase balistique : la satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée,
- phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre

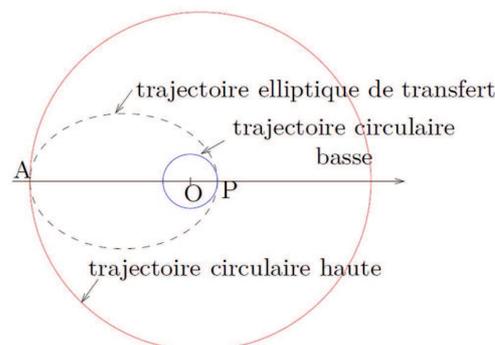
On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

6. Montrer que le mouvement circulaire est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0 , R_T et r .
7. En déduire l'expression de l'énergie cinétique \mathcal{E}_c , de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du satellite en fonction de m , g_0 , R_T et r . Justifier le signe de \mathcal{E}_m .
8. Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km puis pour un rayon $r_h = 40,10^3$ km.

Partie n°3: Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km) puis dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40,10^3$ km) comme illustré sur la figure ci-contre.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

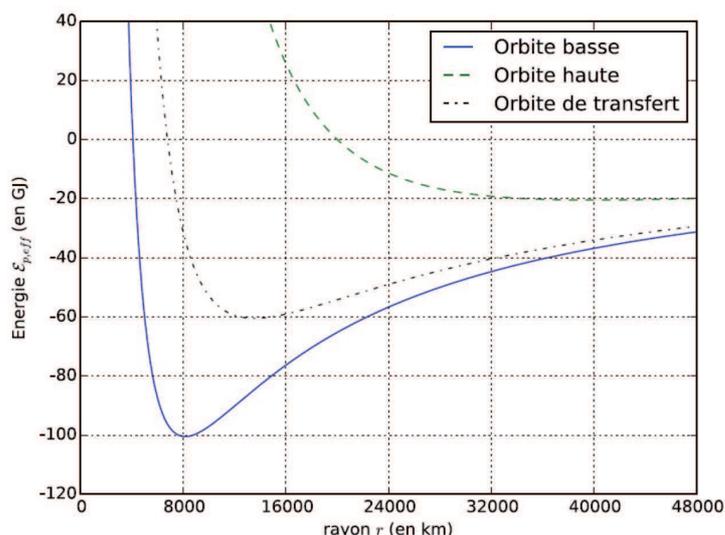


Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer. On considère désormais que le satellite parcourt la trajectoire elliptique de transfert.

9. Que peut-on dire des valeurs de \dot{r} lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?
10. Montrer que l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert s'exprime simplement en fonction de K et a uniquement. Donner cette expression.
11. Relever sur la figure ci-dessous la valeur de l'énergie mécanique \mathcal{E}_{mt} du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

12. Pour changer le satellite de trajectoire, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase, le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite. Relever sur la figure ci-contre la valeur de l'énergie mécanique \mathcal{E}_{mb} du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km.

De même relever la valeur de l'énergie mécanique \mathcal{E}_{mh} du satellite sur l'orbite circulaire haute $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.



13. En déduire la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_{mp}$ à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert.

Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ/kg, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire. Faire l'application numérique.

Partie n°4: Chute du satellite

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement \vec{F}_f de type $\vec{F}_f = -h\vec{v}$. On suppose que le satellite est au départ en orbite circulaire. La force de frottement étant très faible à haute altitude, on peut considérer que le mouvement reste quasiment circulaire à l'échelle d'une révolution. Toutefois son altitude, sa vitesse et donc son énergie dépendent maintenant du temps. Ainsi on peut considérer que les expressions suivantes pour l'énergie mécanique et la vitesse restent valables :

$$\mathcal{E}_m(t) = -\frac{K}{2r(t)} \quad \text{et} \quad v^2(t) = \frac{K}{mr(t)}$$

14. Retrouver en fonction de r l'expression de la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r . Quel est le nom de cette relation ?

A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon $r(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau}r(t) = 0$$

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de h et m . Montrer que τ est bien homogène à un temps.

15. En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0 .

16. Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ .

Problème 3 : Petit déj et tartine beurrée

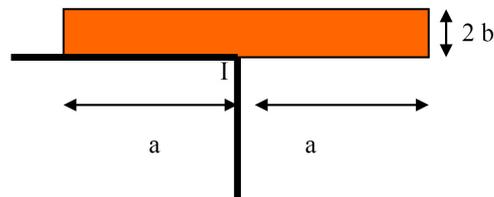
durée conseillée : 40-60 min



Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol. Pourquoi est-ce toujours la face beurrée ?

Partie n°1: Préliminaires

La tartine est modélisée par un parallélogramme rectangle droit, homogène, de dimensions $2a$, $2b$ et $2c$, de centre d'inertie C , de masse m . Elle est posée sur le bord d'une table dans la position de la figure (C à la verticale de I).



Dans cette position instable, elle subit une action très faible qui provoque son basculement autour de I , sans lui donner de vitesse initiale. A ce moment-là, la tartine amorce une rotation autour de Δ axe parallèle au coin de la table passant et par I .

On admettra qu'au début du mouvement il n'y a pas glissement en I , l'action de la table sera représentée par une force $\vec{R} = T\vec{u}_\theta + N\vec{u}_r$, orthogonale à l'arête du coin, dans le plan contenant C .

Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Δ est $I_\Delta = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi la tartine commence à basculer.
2. Justifier pourquoi la tartine peut être considérée comme un système conservatif.
3. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer $\dot{\theta}$ en fonction de θ . En déduire $\ddot{\theta}$ en fonction de θ .

Partie n°2: Discussion sur le glissement de la tartine

4. On suppose toujours que la tartine est en rotation autour de Δ . Ecrire le théorème du centre d'inertie; en déduire T et N en fonction de θ .

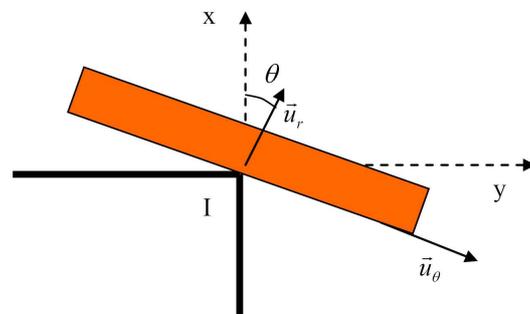
5. On donne $a = 4$ cm et $b = 0,4$ cm. Calculer le coefficient $\frac{b^2}{a^2 + b^2}$.

En déduire une expression approchée de T et de N .

Représenter $\frac{|T|}{mg}$ et $\frac{N}{mg}$ en fonction de θ .

6. La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser ?

7. La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \pi/4$. Evaluer le coefficient de frottement f .



Partie n°3: Chute de la tartine

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. A partir du moment où elle commence à glisser, la tartine quitte très rapidement la table et se trouve en chute libre à partir de $\theta_0 = \pi/4$. On néglige les frottements de l'air.

8. Déterminer $\dot{\theta}_0$ (vitesse angulaire à l'instant où la tartine quitte la table).

On admet dans la suite du problème que la tartine tombe en continuant de tourner autour de son centre de gravité avec la même vitesse angulaire.

9. Déterminer l'équation du mouvement vertical de C en fonction du temps. En déduire le temps de chute si la hauteur de la table est h . Faire l'application numérique pour $h = 70$ cm.

10. Quel est l'angle dont a tourné la tartine lorsqu'elle heurte le sol? Evaluer cet angle et conclure.

11. Pour quelle hauteur h la tartine ne tombe-t-elle plus sur le côté beurré ?

Problème 4 : Sonde à effet Hall : Mesure de champs magnétiques

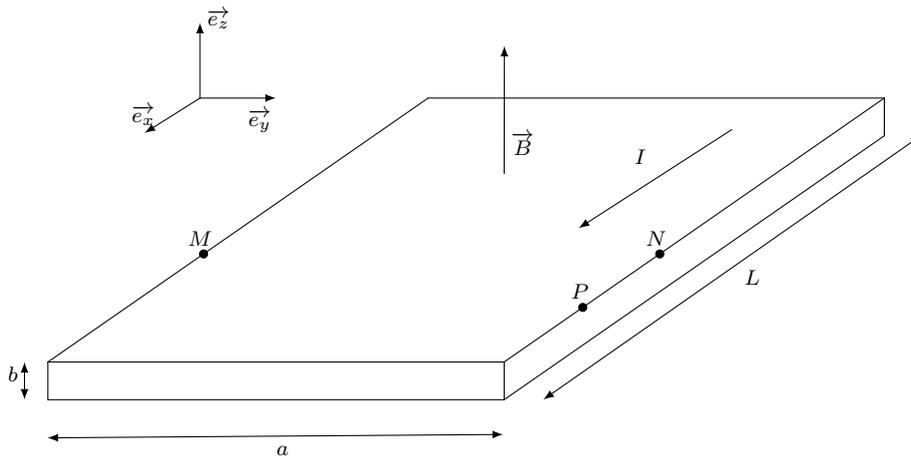
durée conseillée : 40-60 min

Une plaquette conductrice parallélépipédique de longueur L , de largeur a et d'épaisseur b , est traversée dans le sens de la longueur par un courant continu d'intensité I ($I > 0$). Les dimensions de la plaquette sont telles que $b \ll a$.

On note e la charge électrique élémentaire ($e > 0$).

On suppose que les porteurs de charge présents dans la plaquette sont des électrons, qu'ils ont tous la même vitesse \vec{v} et qu'ils sont régulièrement répartis dans le conducteur.

On notera \vec{F}_B la composante magnétique de la force de Lorentz, et \vec{F}_E la composante électrique.



La plaquette est plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (avec $B > 0$) uniforme et permanent, orthogonal à la direction du courant et dirigé selon l'axe des z .

Avant que le régime permanent ne soit atteint, les électrons de conduction dans la plaquette sont soumis une force due à la présence du champ magnétique.

1. Justifier qualitativement et en s'appuyant sur un schéma le fait que l'une des faces de la plaquette se chargera négativement alors que l'autre accusera un défaut électronique et aura donc une charge positive. On mentionnera en particulier sur le schéma les charges qui apparaissent sur les faces concernées.

2. Du fait de ces charges surfaciques, apparaît alors à l'intérieur de la plaquette un champ électrique appelé champ de Hall et noté \vec{E}_{Hall} et qui agit à son tour sur les électrons de conduction. Représenter sur le schéma précédent la direction et le sens de ce champ électrique.

3. Le régime permanent étant atteint, la plaquette plongée dans ce champ magnétique est parcourue à nouveau par un courant continu d'intensité I dirigé selon \vec{e}_x . Les électrons de conduction sont alors soumis en régime permanent à la force magnétique due au champ \vec{B} et à une force électrique due au champ électrique de Hall. Que peut-on dire de la résultante de ces deux forces ? Justifier.

L'intensité I traversant une surface (S) est donnée par :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_{(S)} nq\vec{v} \cdot \vec{dS} = n|q|v ab$$

où q est la charge des porteurs de charge, n le nombre de porteurs de charge par unité de volume et \vec{j} le vecteur densité volumique de courant.

4. Vérifier l'homogénéité de cette expression.

5. Exprimer, en régime permanent, la valeur du champ électrique de Hall E_{Hall} en fonction de I , B , b , a , de la valeur absolue de la charge de l'électron e et de n .

6. On mesure la différence de potentiel Hall $U_{Hall} = U_{NM} = V_N - V_M$ (tension de Hall) entre deux points M et N situés sur les bords de la plaquette et sur une même perpendiculaire à Ox .
Déduire de la question précédente la valeur de U_{Hall} en fonction de B , I , n , e et b .

7. Etude de l'influence de la direction du champ magnétique étudié

On se place maintenant entre les points M et N du schéma, mais le champ magnétique n'est plus dirigé suivant \vec{e}_z .

- Que devient l'expression de la tension de Hall (question 4) lorsque le champ magnétique est dirigé suivant l'axe Oy : $\vec{B} = B\vec{e}_y$?
- Que devient la tension de Hall lorsque le champ magnétique est dirigé suivant l'axe Ox : $\vec{B} = B\vec{e}_x$?
- En déduire comment positionner la plaquette à effet Hall pour que l'on mesure effectivement et précisément l'intensité du champ B .

8. Erreur de positionnement des soudures

On considère à nouveau que le champ \vec{B} est dirigé suivant \vec{e}_z .

On commet une erreur de positionnement du contact N lors de la mesure de la différence de potentiel. On mesure en fait la différence de potentiel $U_{PM} = V_P - V_M$ entre les points M et P tels que $NP = d$ (voir schéma).

On suppose que le matériau possède une conductivité γ et obéit à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

9. Déterminer la composante du champ électrique qui existe suivant la direction Ox en fonction de I , a , b et γ .

En déduire la différence de potentiel $U_{NP} = V_N - V_P$ qui existe entre les points N et P en fonction de I , a , b , d , γ .

10. En déduire l'expression de la différence de potentiel U_{PM} sous la forme $U_{Hall}(1 - \varepsilon)$. Donner l'expression de ε en fonction de d , n , e , B , γ et a .

Les dimensions de la plaquette et le champ \vec{B} étant fixés, indiquer, en raisonnant sur ε , comment minimiser la différence entre la tension U_{PM} mesurée et la tension de Hall $U_{NM} = U_{Hall}$?

11. Citer des applications possibles de l'effet Hall.

