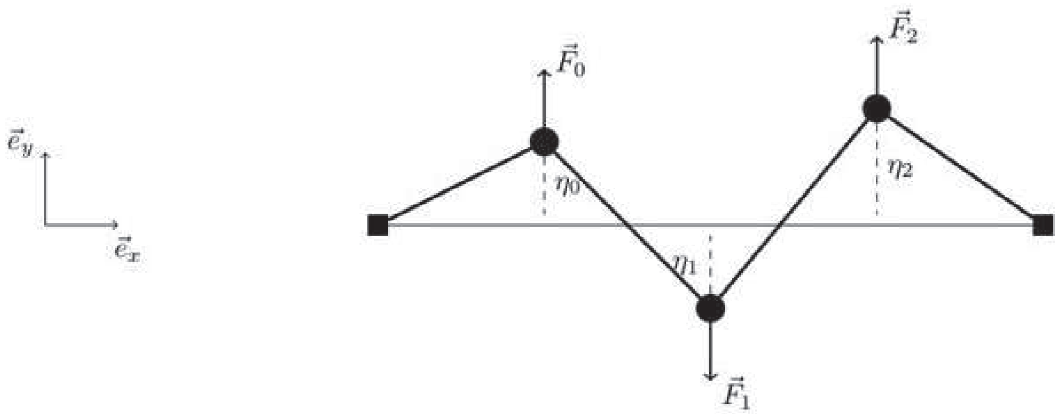
Méthode du pivot de Gauss - 2

Partie n°3: Application : Corde sous contrainte

On considère un fil horizontal, attaché aux extrémités, sur lequel sont régulièrement réparties N masses, numérotées de 0 à $N-1$. On applique sur chaque masse une force $\overrightarrow{F_i}$ (supposée constante) perpendiculaire au fil, également dans le plan horizontal, comme le montre le schéma suivant ($N = 3$ ici).



On cherche à étudier les petits déplacements ηi des masses (largement exagérés sur la figure ci-dessus) dans la direction perpendiculaire à l'axe du fil. Pour de petits déplacements, la longueur du fil entre deux masses reste constante égale à ℓ et la tension du fil T est également constante. Au premier ordre, l'équation du mouvement de la masse numéro i dans la direction $\overrightarrow{e_y}$ s'écrit :

$$m\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = f_i - \frac{T}{\ell}(\eta_i - \eta_{i-1}) + \frac{T}{\ell}(\eta_{i+1} - \eta_i)$$

où ℓ est la longueur du fil entre deux masses m (ou une masse et l'extrémité du fil), T est la tension du fil et $\overrightarrow{F_i} = f_i\overrightarrow{e_y}$, avec la convention $\eta_{-1} = \eta_N = 0$.

1. En convenant que $\frac{T}{\ell} = 1$ N.m^{-1} pour simplifier, écrire le système linéaire vérifié par $(\eta_0,\ldots,\eta_{N-1})$ lorsque le système est à l'équilibre. En déduire les matrices M, F et E telles que le système puisse s'écrire $M \times E = F$.

2. Créer en Python les matrices $M3$ et $F3$ associées à l'exemple de la figure et dans le cas où les composantes des forces sont identiques et valent toutes 1.

3. Résoudre ce système et en déduire l'allure de la corde à l'équilibre.

4. A l'aide du module `matplotlib.pyplot`, construire une fonction `profil_corde(M,F)` qui prend en argument les matrices M et F et renvoie le graphe de l'allure de la corde. On pourra créer une liste allant de 0 à 4 par pas de 1 et on fixera la corde en 0 pour les positions 0 et 4.

5. On veut maintenant étudier une corde constituée de N masses. Pour cela créer une fonction `matrix_corde(N)` qui prend comme argument le nombre de masses N et renvoie la matrice M associée au problème. Tester votre fonction avec $N = 25$.

6. Ecrire une fonction `profil_corde_n(M,F)` qui prend comme argument M, F et trace l'allure de la corde.

7. Tester la fonction avec un vecteur F ne contenant que des 1 puis avec un autre contenant alternativement des 1 et des -0,95 en commençant par un 1.