Méthode du pivot de Gauss

TD Info 16

Objectif : à partir de fonctions écrites en cours, écrire le programme du pivot de Gauss puis le tester lors de la résolution d'un problème physique.

Partie n°1: Pivot de Gauss

1. Entrer la matrice carrée A inversible 3×3 suivante sous forme de liste ainsi que le vecteur Y associé sous forme d'une matrice colonne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -2x & - & y & - & 3z & = & -5 \\ 6x & + & 4y & + & 4z & = & 16 \end{array}\right.$$

2. Ecrire les fonctions `matrice_aug`, `chercher_pivot`, `echanger_lignes` et `Combinaison`. Tester ces fonctions grâce aux matrices A et Y (ne pas hésiter à modifier ces matrices).

Le type `list`, en Python, est mutable. Ainsi, si l'on passe une matrice (sous la forme d'une liste de listes) en argument d'une fonction, les modifications de la matrice affectent directement la variable originale. Par précaution, pour ne pas modifier les données passées en entrée, on commence par réaliser une copie de la matrice initiale, que l'on manipule ensuite dans les fonctions évoquées ci-dessus.

Python
```python
import copy
A,Y = copy.deepcopy(A0), copy.deepcopy(Y0)
```

3. Ecrire une fonction `resolution` qui prend en argument une matrice `A0` et un vecteur `Y0` et qui retourne la solution du système linéaire. Cette fonction pourra être décomposée en 3 étapes :

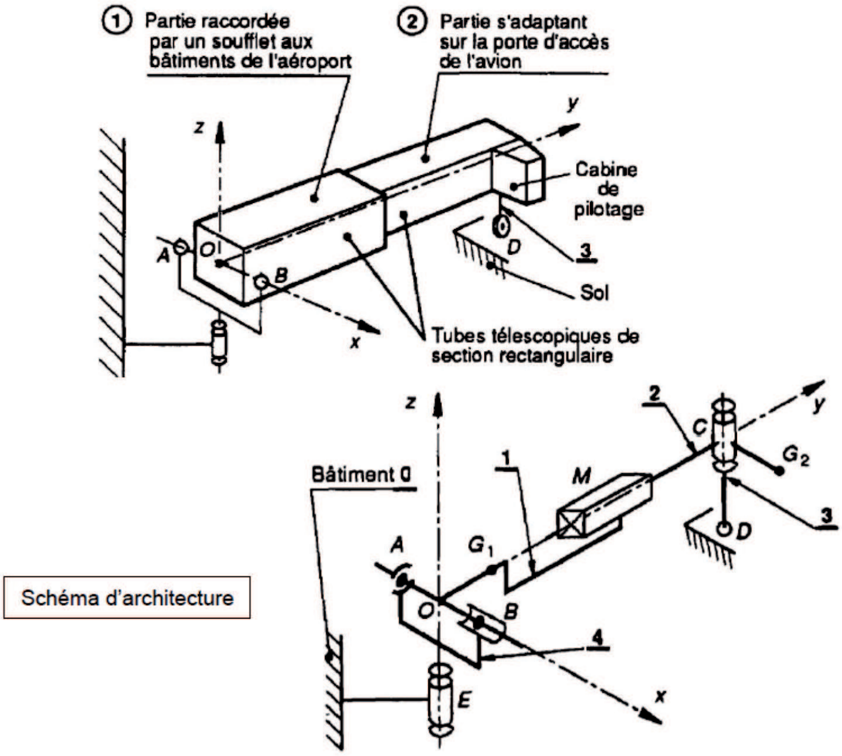
- copie des listes `A0` et `Y0` passées en argument.
- mise sous forme triangulaire (appel des fonctions `matrice_aug`, `chercher_pivot`, `echanger_lignes` et `Combinaison`)
- phase de remontée.

4. Résoudre le système donné en exemple.

Partie n°2: Application : Passerelle télescopique d'aéroport

Dans les aéroports modernes, des passerelles télescopiques comme celle modélisée ci-dessous relient les avions aux halls d'accès. L'appareil comporte

- deux couloirs 1 et 2,
- une roue motrice 3,
- un cadre 4.



Le poids des solides 3 et 4 est négligeable devant le poids des couloirs 1 et 2.

Le couloir 1 a pour centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = d\overrightarrow{y}$. Le couloir 2 a pour centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{CG_2} = e\overrightarrow{x}$.

- → l'extrémité raccordée aux bâtiments (par des soufflets) est soutenue par le solide 4.
- → Pour pouvoir atteindre la porte de l'avion, l'autre extrémité peut se déplacer dans toutes les directions grâce à une roue motrice orientable 3.
- → Un système non représenté et non étudié permet une translation du point C suivant la direction $\overrightarrow{z}$ afin d'adapter le système aux différentes hauteurs des avions. Durant tout le problème, nous considérerons le couloir horizontal , et $\overrightarrow{DC} = h\overrightarrow{z}$
- → Toutes les liaisons sont considérées parfaites.

Afin de dimensionner les liaisons A, B, C, D, E et M, il est nécessaire de connaître les actions mécaniques admissibles par ces dernières.

La modélisation nous donne les torseurs statiques suivants :

- $\left\{\mathscr{T}_{(0\to4)}\right\} = {}_E\left\{\begin{array}{cc} X_{0\to4} & L_{E,0\to4} \\ Y_{0\to4} & M_{E,0\to4} \\ Z_{0\to4} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(0\to3)}\right\} = {}_{\forall P\in(D,\vec{z})}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{0\to3} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(pes\to1)}\right\} = {}_{\forall P\in(G_1,\vec{z})}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_1g & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(pes\to2)}\right\} = {}_{\forall P\in(G_2,\vec{z})}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_2g & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(1\to4)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X^{LA}_{1\to4} & 0 \\ Y^{LA}_{1\to4} & 0 \\ Z^{LA}_{1\to4} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(1\to4)}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y^{LB}_{1\to4} & 0 \\ Z^{LB}_{1\to4} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(2\to1)}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{cc} X_{2\to1} & L_{M,2\to1} \\ 0 & M_{M,2\to1} \\ Z_{2\to1} & N_{N,2\to1} \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(pes\to1)}\right\} = {}_{\forall P\in(G_1,\vec{z}}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_1g & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\left\{\mathscr{T}_{(2\to3)}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{cc} X_{2\to3} & L_{C,2\to3} \\ Y_{2\to3} & M_{C,2\to3} \\ Z_{2\to3} & \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

La résolution en utilisant le principe fondamental de la statique nous donne le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
X_{0\to4} = 0 \\
Y_{0\to4} = 0 \\
Z_{0\to4} + Z_{0\to3} - m_2g - m_1g = 0 \\
L_{E,0\to4} + y_0\cdot Z_{0\to3} - y_0\cdot m_2g - d\cdot m_1g = 0 \\
M_{E,0\to4} + e\cdot m_2g = 0 \\
X^{LA}_{1\to4} = 0 \\
Y^{LA}_{1\to4} + Y^{LB}_{1\to4} = 0 \\
Z^{LA}_{1\to4} + Z^{LB}_{1\to4} + Z_{0\to4} = 0 \\
L_{E,0\to4} = 0 \\
-e\cdot m_2g - aZ_{0\to4} - 2aZ^{LB}_{1\to4} = 0 \\
2aY^{LB}_{1\to4} = 0 \\
X_{2\to1} = 0 \\
0 = 0 \\
Z_{2\to1} + \frac{(y_0-d)m_1g}{y_0} - m_1g = 0 \\
L_{M,2\to1} - l\frac{(y_0-d)m_1g}{2y_0} + (l-d)m_1g = 0 \\
M_{M,2\to1} - em_2g = 0 \\
N_{N,2\to1} = 0 \\
X_{2\to3} = 0 \\
Y_{2\to3} = 0 \\
Z_{2\to3} + \frac{dm_1g+y_0m_2g}{y_0} = 0 \\
L_{C,2\to3} = 0 \\
M_{C,2\to3} = 0
\end{array}\right.$$

On donne :

$$\mathrm{OC} = y_0 = 16 \text{ m}$$
$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = a = 1,5 \text{ m}$$
$$\mathrm{OG_1} = d = 5 \text{ m}$$
$$\mathrm{CG_2} = e = 5 \text{ m}$$
$$\mathrm{CD} = \mathrm{OE} = h = 4 \text{ m}$$
$$\mathrm{OM} = \ell = 15 \text{ m}$$
$$m1 = 5.10^3 \text{ kg}$$
$$m2 = 6.10^3 \text{ kg}$$

5. Résoudre le système et afficher les résultats sous forme de tableaux correspondant à chaque torseur.